Développement d'une cape d'invisibilité pour des longueurs d'ondes visibles

Jean-Christophe Gomez-Lavocat

5 octobre 2008

Table des matières

Table des matières **1**

1 Introduction **3**

2 Calculs des propriétés de la cape d'invisibilité **4**
2.1 Rappels mathématiques 4
2.2 Résultat admis 5
2.3 Transformations géométriques 5

3 Conception d'une cape d'invisibilité : approche par les métamatériaux **8**
3.1 Introduction aux métamatériaux 8
3.2 Les différentes tentatives 9

4 Simulations **11**
4.1 Description des simulations 11
4.2 Résultats 12
4.2.1 Anneaux à épaisseur constante 12
4.2.2 Anneaux dont l'épaisseur varie selon ε 14
4.2.3 Cape dont les motifs de base s'approchent de carrés 15

5 Cape d'invisiblité tournante **19**

Annexes **21**

A Mise en pratique de l'homogénéisation **21**
A.1 Intérêt de l'homogénéisation 21
A.2 Présentation du problème : notations, définitions 21
A.3 Le problème 22

B Description du champ diffracté à l'infini **24**

Bibliographie **27**

Chapitre 1

Introduction

Le but d'une cape d'invisibilité est de rendre invisible un objet ou une personne. Afin de soustraire cet objet à la vue des personnes qui l'entourent, le plus simple est de simuler son absence. Considérons une source lumineuse $\mathcal{S}$ ainsi qu'un observateur $\mathcal{O}$. Si l'objet ne se trouve pas présent, $\mathcal{O}$ va recevoir les rayons lumineux de manière direct. Si l'objet est présent, celui-ci va, soit réfléchir des rayons s'il ne se trouve pas sur la route $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$, soit absorber des rayons s'il se trouve entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{O}$.
Le but d'une cape d'invisibilité est de rendre invisible un objet ou une personne. Afin de soustraire cet objet à la vue des personnes qui l'entourent, le plus simple est de simuler son absence. Considérons une source lumineuse $\mathcal{S}$ ainsi qu'un observateur $\mathcal{O}$. Si l'objet ne se trouve pas présent, $\mathcal{O}$ va recevoir les rayons lumineux de manière direct. Si l'objet est présent, celui-ci va, soit réfléchir des rayons s'il ne se trouve pas sur la route $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$, soit absorber des rayons s'il se trouve entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{O}$.

En pratique les rayons lumineux sont déviés dès qu'ils passent d'un milieu à un autre car l'indice de réfraction diffère. On peut alors s'imaginer que dévier suffisamment la lumière pour qu'elle évite complètement une région de l'espace servira à construire cette cape d'invisibilité. C'est en effet le principe qui sera abordé ici, mais il faut bien prendre conscience que les indices de réfraction ne se modifient pas si facilement. Récemment, les **métamatériaux** ont permis aux scientifiques de faire de grands progrès dans ce sens. Soumis à un champ électromagnétique, les méta-matériaux réagissent en induisant un champ magnétique interne, et peuvent modifier la course des rayons lumineux. En outre, ils sont même capables de présenter des indices de réfraction « négatifs » !

Les équipes de recherche dirigées par Ulf Leonhardt (université de St Andrews, Ecosse) et de John Pendry (Imperial College, Londres) ont montré que, en théorie, des métamatériaux pourraient faire « couler » la lumière autour d'un objet donné, et être utilisés pour construire des boucliers d'invisibilité. Néanmoins, ces systèmes ne pourraient dissimuler des objets qu'aux longueurs d'ondes correspondant à la taille des composants des méta-matériaux. Aussi, pour concevoir une cape fonctionnant dans le champ visible, il conviendrait de la « tisser » aux échelles microscopique et nanoscopique. Cependant, les chercheurs pensent pouvoir contourner le problème en entourant le « trou d'invisibilité » d'un matériau à haut indice de réfraction.

Dans ce document, nous calulerons dans un premier temps les propriétés que devront posséder les métamatériaux dans un cape d'invisibilité. Nous verrons ensuite comment implémenter ceux-ci de manière concrète. Enfin, nous essayerons d'adapter les résultats au domaine visible.

Chapitre 2

Calculs des propriétés de la cape d'invisibilité

2.1 Rappels mathématiques

La théorie sur laquelle se base l'implémentation d'une cape d'invisibilité avec des métamatériaux demande quelques outils d'algèbre linéaire. Nous les présentons donc dans ce chapitre afin de pouvoir appuyer mathématiquement les démonstrations qui vont suivre.

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans un espace Euclidien dont l'espace associé est $\mathbb{R}^3$, muni du repère $\mathcal{R}$ et du système de coordonnées (x, y, z). On suppose qu'il existe un diffeomorphisme φ qui relie les coordonnées (x, y, z) à un nouveau repère $\mathcal{C}$ de coordonnées (r, θ, z). Lorsque l'on étudie ce changement de référentiel, de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{C}$ on utilise $r(x, y, z)$, $\theta(x, y, z)$ et $z'(x, y, z)$. Si ces trois fonctions sont différentiables, on a :

$$\begin{cases} dr = & \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz \\ d\theta = & \frac{\partial \theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta}{\partial z}dz \\ dz' = & \frac{\partial z'}{\partial x}dx + \frac{\partial z'}{\partial y}dy + \frac{\partial z'}{\partial z}dz \end{cases}$$

Ainsi, en introduisant la matrice Jacobienne J il vient :

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ dz' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

où J est donnée par :

$$J = \frac{\partial(r, \theta, z')}{\partial x, y, z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Par exemple, le champ électromagnétique qui est défini de manière intrinsèque par :

$$\mathbf{E} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = (E_x E_y E_z) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Mais aussi par :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = E_r dr + E_\theta d\theta + E_{z'} dz' &= (E_r E_\theta E_{z'}) \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ dz' \end{pmatrix} \\ &= (E_r E_\theta E_{z'})\, J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_{z'} \end{pmatrix} = J^{-t} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

2.2 Résultat admis

On admettra les résultats suivants (dont la preuve se trouve dans [1]). Si T est donné par : $T = \dfrac{J^t J}{det(J)}$, alors :

$$\begin{cases} \varepsilon' = \varepsilon T^{-1} \\ \mu' = \mu T^{-1} \end{cases}$$

2.3 Transformations géométriques

Dans la suite de ce document nous chercherons à rendre invisible un zone sphérique. Pour cela, nous allons utiliser la méthode décrite par *Pendry* dans [7]. On va considérer une contraction de l'espace, centrée sur le cylindre à rendre invisible. De manière schématique, imaginons que l'espace soit assimilé à un film en plastique étirable. En situation normale, le film serait étiré. Lors de notre opération, nous immobiliserions le film avec un anneau de rayon R_2 et percerions le film en A. Ensuite, nous l'étirerons de manière symétrique (autour de ce point A) jusqu'à une distance de R_1.

L'espace autour de l'anneau serait resté inchangé, tandis qu'à l'intérieur de l'anneau, seule la partie comprise entre R_1 et R_2 serait existante. Ainsi, si l'on modifie les propriétés de la matière de façon à simuler cette transformation de l'espace, on arrivera à avoir une zone d'invisibilité. Nous allons voir à présent comment doivent se présenter les propriétés électromagnétiques du matériaux.

Pour effectuer le calcul, nous partirons d'un repère cartésien, passerons dans un repère cylindrique, puis nous appliquerons la transformation. Afin de donner les coefficients de manière plus pratiques au niveau informatique (voir la partie dédiée à la simulation numérique) on repassera enfin en repère cartésien.

La transformation sera alors caractérisée par : $J_{x\to x'} = J_{x\to r} J_{r\to r'} J_{r'\to x'}$. Les *jacobiennes* en question sont données par :

$$\begin{aligned} J_{x\to r} &= R(\theta)\mathrm{diag}(1, r, 1) \\ J_{r\to r'} &= \mathrm{diag}(\frac{R_2}{R_2 - R1}, 1, 1) \\ J_{x\to r} &= \mathrm{diag}(1, \frac{1}{r'}, 1) R(\theta') \end{aligned}$$

Ainsi, après calcul, on obtient :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{-2\,(\cos(\theta))^2 r'\,R_1 + (\cos(\theta))^2 {R_1}^2 + {r'}^2}{(-r'+R_1)r'} & -\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)R_1\,(-2\,r'+R_1)}{(-r'+R_1)r'} & 0 \\ -\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)R_1\,(-2\,r'+R_1)}{(-r'+R_1)r'} & \frac{-{r'}^2+2\,r'\,R_1-{R_1}^2-2\,(\cos(\theta))^2 r'\,R_1+(\cos(\theta))^2 {R_1}^2}{(-r'+R_1)r'} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(-r'+R_1){R_2}^2}{r'\,(R_2-R_1)^2} \end{pmatrix}$$

Ce qui vaut, après simplification :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\frac{R_1\left((\cos(\theta))^2-1\right)}{r'-R_1}-\frac{(\cos(\theta))^2 R_1}{r'} & -\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)R_1\,(-2\,r'+R_1)}{(-r'+R_1)r'} & 0 \\ -\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)R_1\,(-2\,r'+R_1)}{(-r'+R_1)r'} & 1+\frac{(\cos(\theta))^2 R_1}{r'-R_1}-\frac{R_1\left((\sin(\theta))^2\right)}{r'} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(-r'+R_1){R_2}^2}{r'\,(R_2-R_1)^2} \end{pmatrix}$$

On obtient donc les résultats (image 2.1) présentés à la page 7,

Tous ces résultats ont été obtenus au préalable par F. Zolla, S. Guenneau, A.Nicolet, et J.B. Pendry dans [14]. Notre travail a consisté ici à reprendre les équations de leurs recherches, à les vérifier, et à établir les expériences concernant la cape d'invisibilité réelle.

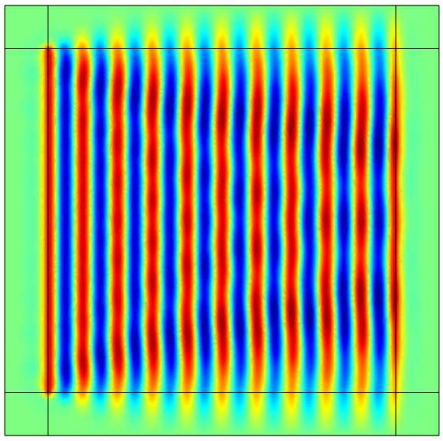


FIGURE 2.1 – Source d'ondes planes

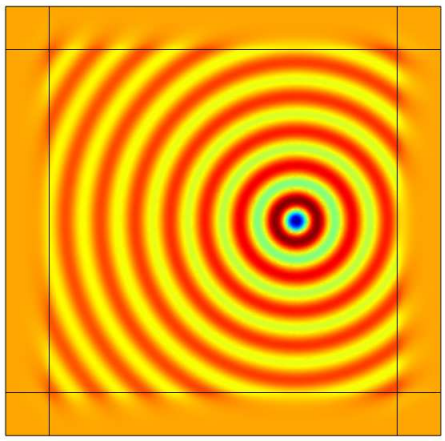


FIGURE 2.2 – Source d'ondes sphériques

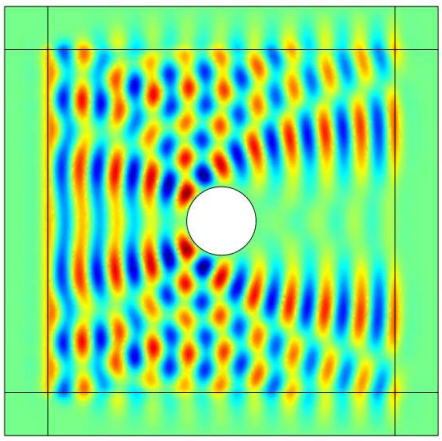


FIGURE 2.3 – Source d'ondes planes diffractées par un cylindre

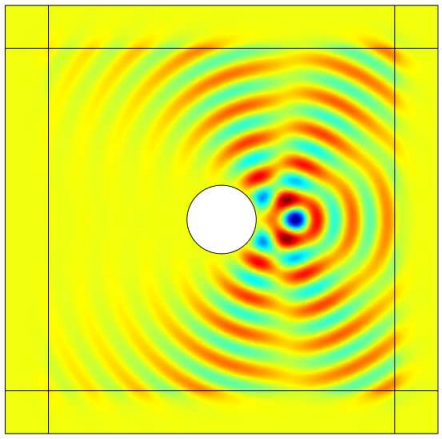


FIGURE 2.4 – Source d'ondes sphériques diffractées par un cylindre

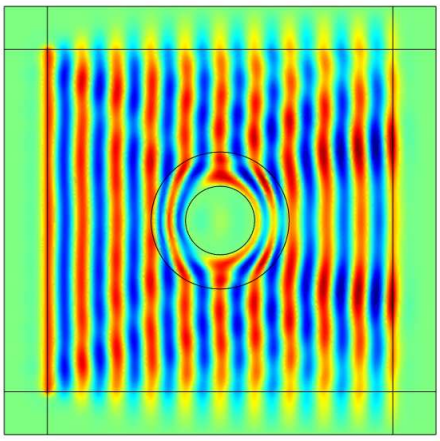


FIGURE 2.5 – Source d'ondes planes avec cape d'invisibilité

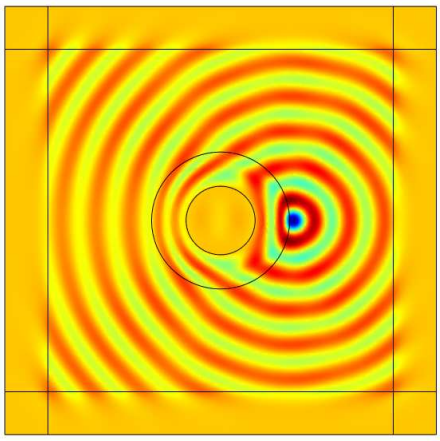


FIGURE 2.6 – Source d'ondes sphériques avec cape d'invisibilité

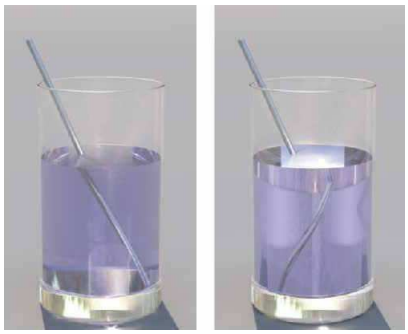
Chapitre 3

Conception d'une cape d'invisibilité : approche par les métamatériaux

3.1 Introduction aux métamatériaux

Les métamatériaux ont engendré un élan d'intérêt exceptionnel dans la communauté de l'électromagnétisme depuis leur apparition, il y a moins de dix ans. Ils autorisent une grande souplesse dans la conception et la réalisation de matériaux présentant deux paramètres électromagnétiques indépendants. Il aurait, en effet, été impossible de s'imaginer que la conception d'une cape d'invisibilité puisse être envisagée il y a dix ans.

L'expression "métamatériaux " représente un ensemble de matériaux composites artificiels qui présentent des propriétés électromagnétiques qu'on ne retrouve pas dans les matériaux naturels. On a, par exemple, réussi à simuler un indice de réfraction négatif grâce à leur utilisation [11]. Un tel comportement n'existe pas à l'état naturel. Pour comprendre cet effet on peut le comparer à l'effet de l'eau. Lorsque l'on trempe un baton dans l'eau, on le voit se déformer dans le "sens du baton" (voir dessin ci-dessous). Si ce même baton était trempé dans un liquide a indice négatif, nous verrions le baton de plier dans le sens inverse.



Les métamatériaux se présentent sous la forme de structures périodiques, diélectriques ou métalliques, qui se comportent comme des matériaux homogènes n'existant pas à l'état naturel. Il existe plusieurs types de métamatériaux en électromagnétisme, les plus connus étant ceux susceptibles de présenter à la fois une permittivité et une perméabilité négatives. Mais il en existe d'autres (milieux d'impédance infinie, milieu à permittivité relative inférieure à 1, etc...).

D'après les équations obtenues dans la partie 2, nous allons tenter d'approcher les résultats grâce à l'utilisation de métamatériaux.

3.2 Les différentes tentatives

Pour le moment plusieurs tentatives ont eu lieu. La plupart utilisent le concept de métamatériaux. D'autre essayent de simplifier le problème pour se ramener à des cas plus aisés à traiter, mais moins généraux. On remarquera, dans les exemples donnés ci après, que les efforts se concentrent sur la cape théorique cylindrique proposée par Pendry, Schurig et Smith [7] puis simplifiée dans le cas d'une onde transverse magnétique (TM) proposée par Scurig et Al. [10].

$$\varepsilon_r = \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)^2 \left(\frac{r - R_1}{r}\right)^2, \varepsilon_\theta = \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)^2, \mu_3 = 1 \tag{3.1}$$

Quatre principales méthodes ont été mises au point. La première d'entre elles utilise des Split Ring Resonators (SRR) [10]. Il s'agit en réalité d'anneaux concentriques sur lequels est gravé un réseaux d'anneaux métalliques résonnants. En jouant sur les paramètres géométriques de ces anneaux, on peut modifier les paramètres electromagnétiques macroscopiques de la structure (ε et μ). La deuxième méthode, assez similaire, s'appuie sur l'utilisation de fil métalliques insérés dans la structure [12].

La troisième méthode consiste à utiliser des couches concentriques de même épaisseur, avec diverses propriétés électromagnétiques. La formulation de la permittivité et de la perméabilité se trouve donc d'après les résultats d'homogénéisation obtenus par Rytov [9] :

$$\varepsilon_x = \left(\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right), \quad \varepsilon_y = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right) \tag{3.2}$$

Une cape avec couches concentriques a été décrite par Huang en 2007 [13]. Néanmoins, les matériaux utilisés dans la cape n'existe pas dans la nature, et il pourrait être interessant de modifier cette structure pour obtenir des résultats plus satisfaisants (couches d'épaisseurs différentes par exemple).

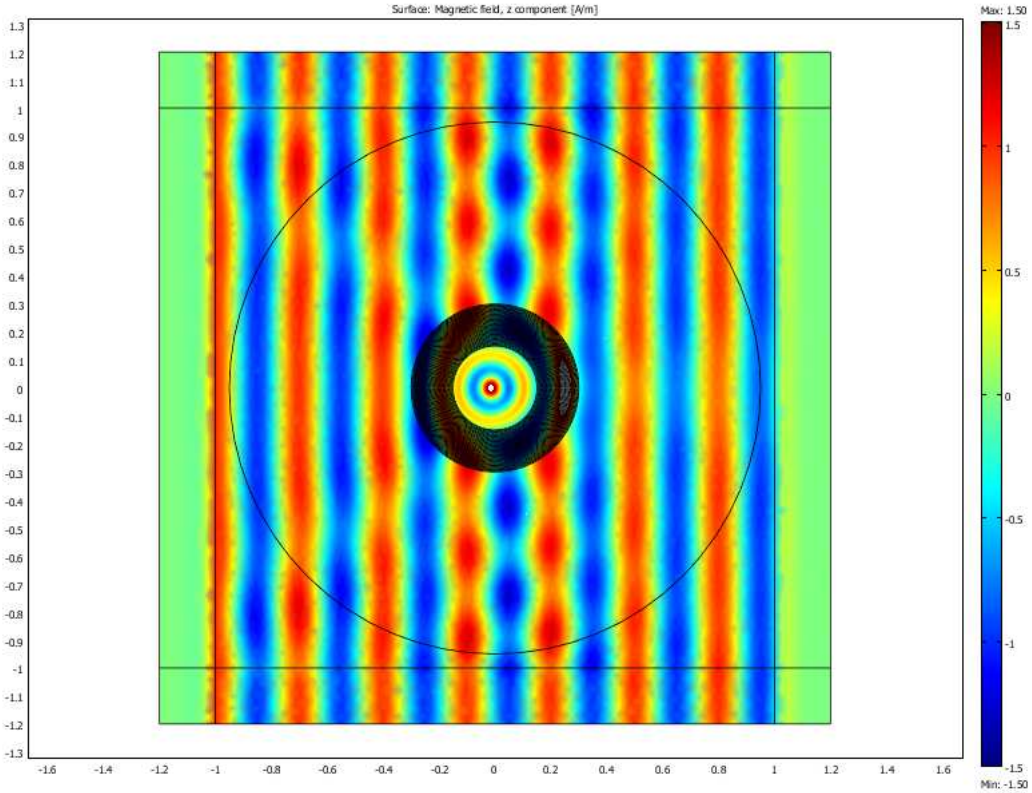


FIGURE 3.1 – La cape de Huang

Enfin, la quatrième méthode est celle qui va occuper le reste de cet article. Il s'agit d'une structure proposée par Farhat et Al. [5]. Celle-ci est composée d'anneaux concentriques qui vont diffracter la

lumière incidente et dont on essaye de contrôller les propriétés macroscopique (voir la partie dédiée à l'homogénéisation A page 21) pour qu'elle s'approche des résultats voulus. Dans cette géométrie de nombreux facteurs sont modifiables : taille des secteurs, périodicité angulaire, propriétés des matériaux, forme du motif de base.

La suite de ce document va présenter les différents paramètres testés, ainsi que les résultats obtenus.

Chapitre 4

Simulations

4.1 Description des simulations

Les totalité des simulations suivantes a été réalisée sous COMSOL 3.4.0.248, logiciel de calcul d'éléments finis. De nombreux paramètres pouvant être ajustés nous fixons tout d'abord le vocabulaire que nous suivons.

Définition 1:
On appelle **tuile** un motif élémentaire de base que l'on reproduira selon l'axe $\overrightarrow{e_r}$ ou $\overrightarrow{e_\theta}$.
On appelle **nombre d'anneaux**, le nombre de tuiles distinctes selon la direction $\overrightarrow{e_r}$.
On préfère, plutôt que de donner le nombre de tuiles selon $\overrightarrow{e_\theta}$, parler de **périodicité angulaire** et donner θ, le plus petit angle de rotation qui laisse la structure invariante.

Remarque : a partir de cette définition on peut toutefois remonter au nombre de tuiles selon $\overrightarrow{e_\theta}$ d'après :

$$nb_{tuiles} = \frac{2\pi}{T_\theta}$$

où nb_{tuiles} correspond au nombres selon $\overrightarrow{e_\theta}$ et où T_θ est la périodicité angulaire.

Seuls trois valeurs de périodicité angulaire ont été testées : $\frac{\pi}{32}$, $\frac{\pi}{64}$ et $\frac{\pi}{128}$. Ainsi les différentes capes possèdent respectivement 64, 128 et 256 tuiles répétées selon $\overrightarrow{e_\theta}$.

Au cours des simulations nous avons utilisé 4 matériaux différents. Le premier a été un métal parfaitement conducteur, qui n'absorbait pas les rayons électromagnétiques. Les autres sont reproduits dans le tableaux suivants avec le métal et la longueur d'onde à laquelle on peut les obtenir.

Matériaux	Longueur d'onde (λ)	Permittivité (ε)
Or	10 000 nm	$\varepsilon = -5054 + 1090i$
Or	1 512 nm	$\varepsilon = -102 + 12i$
Argent	590 nm	$\varepsilon = -13.4 + 0.89i$

TABLE 4.1 – Valeur des indices utilisés

Différentes tailles de structure ont été testées pour la cape. Ces tailles s'étalaient de deux à plusieurs fois la longueur d'onde. L'onde envoyée était transverse magnétique (seule composante magnétique selon $\vec{e_z}$).

Dans l'ensemble des cas on a tracé le champ magnétique selon la composante $\vec{e_z}$ et le champ diffracté selon cette même composante. L'influence de la cape devant le moins se faire sentir, nous avons pensé qu'il était essentiel de tracer le champ diffracté à l'infini : on retrouvera ces graphes à la suite des représentations. Dans les représentations de ce chapitre, seul le matériau Or à 1 521nm a été représenté, car c'est celui qui s'approche le plus du domaine visible en gardant des résultats corrects.

4.2 Résultats

4.2.1 Anneaux à épaisseur constante

Dans ces simulations nous avons utilisé des capes dont le rayon de chaque anneau était identique. Nous avons donc joué sur le nombre d'anneaux (et par conséquent sur leur épaisseur) et sur la périodicité angulaire.

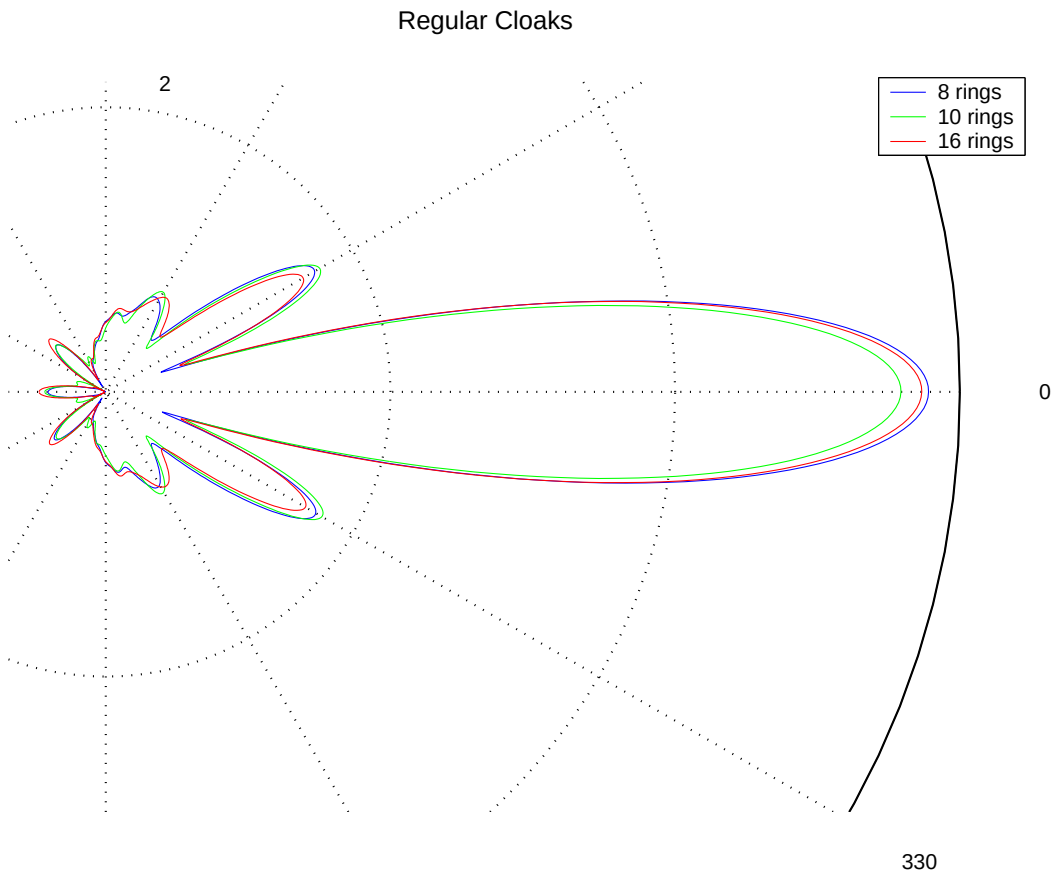
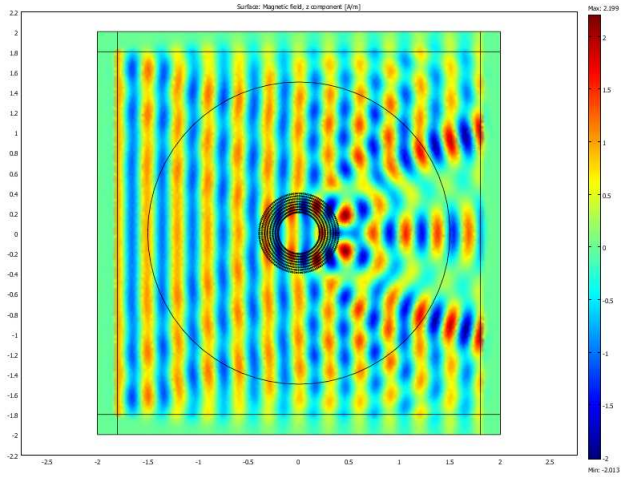
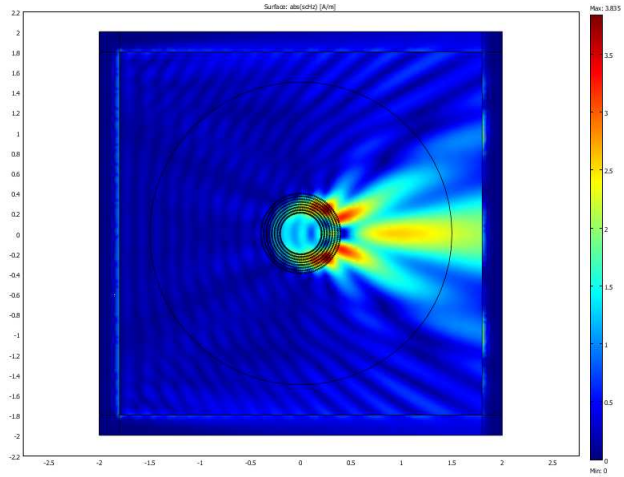


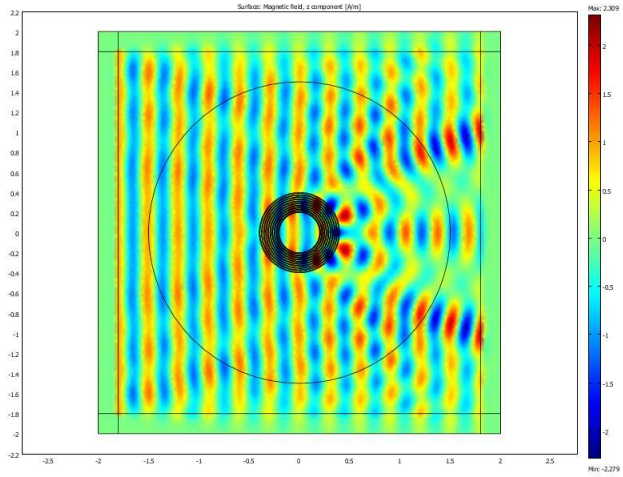
FIGURE 4.1 – Champs diffractés en coordonnées polaires



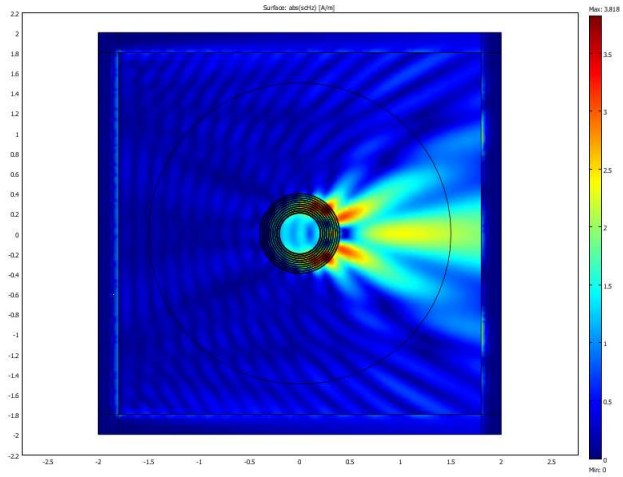
(a) Regu - 8rings - 64rayons - ε=100 - 1GHz



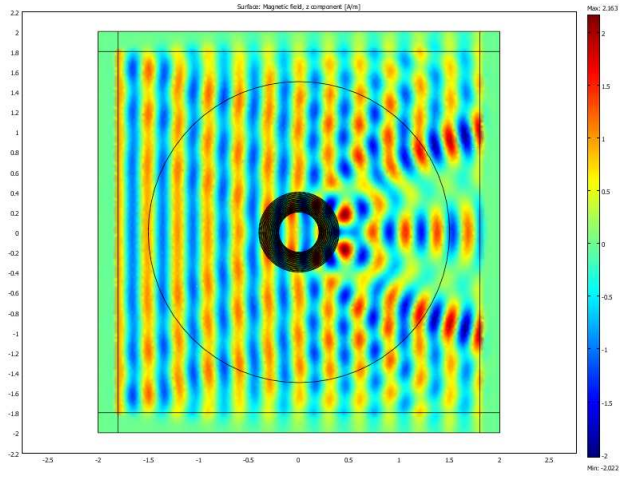
(b) Champ diffracté : Regu - 8rings - 64rayons - ε=100 - 1GHz



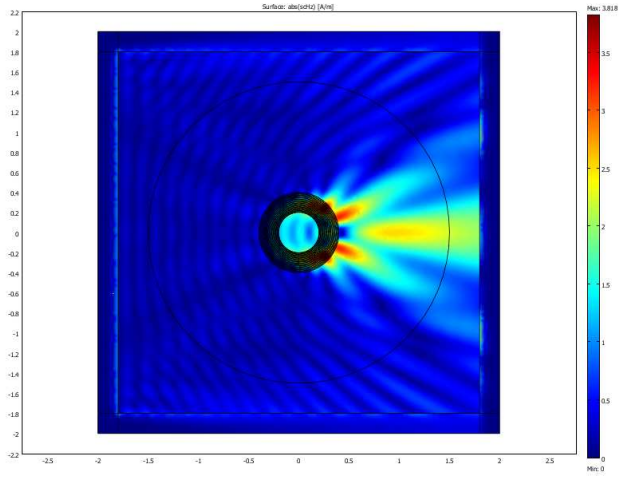
(c) Regu - 10rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz



(d) Champ diffracté : Regu - 10rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz



(e) Regu - 16rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz



(f) Champ diffracté : Regu - 16rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz

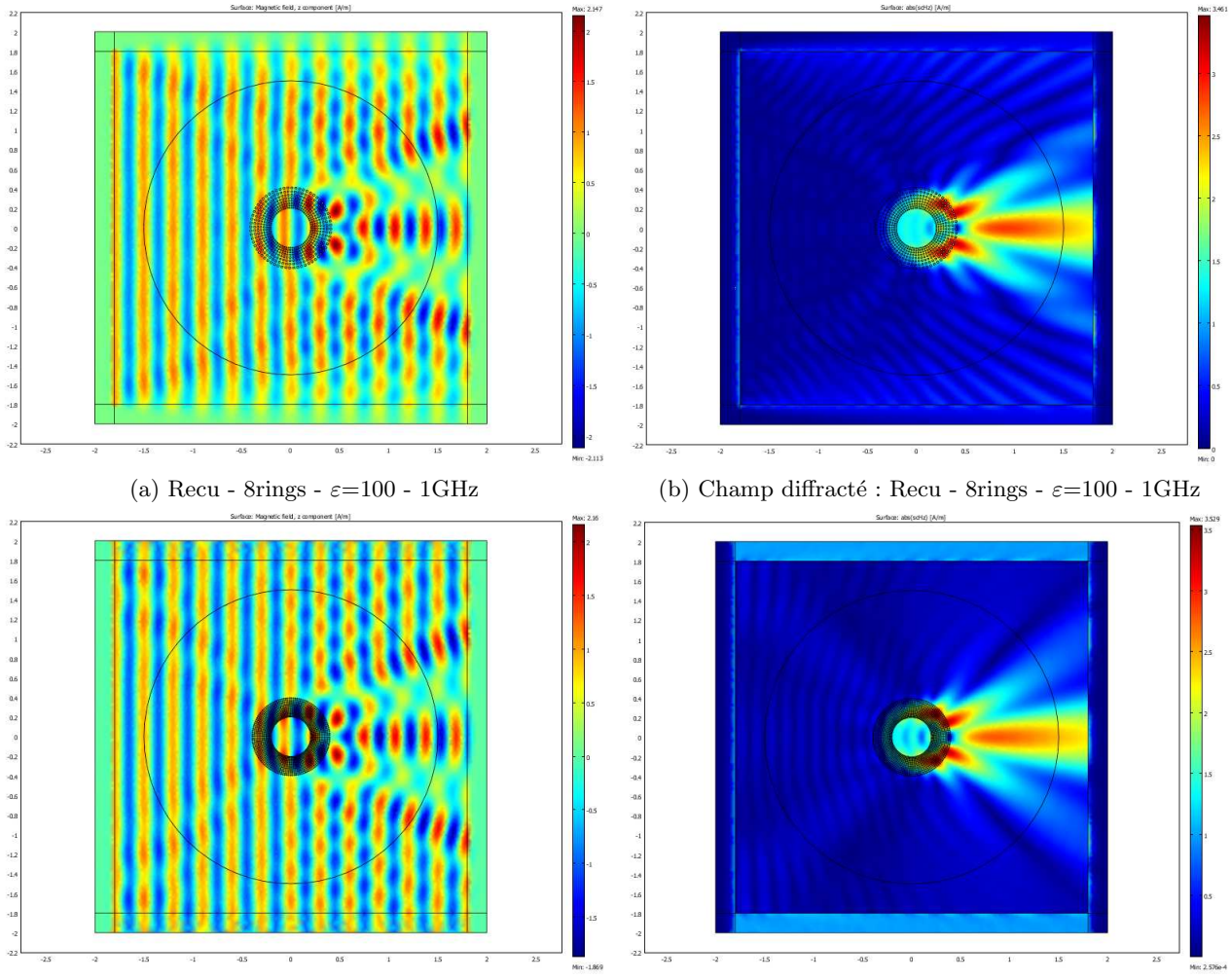
FIGURE 4.2 – Cape dont les anneaux ont une épaisseur constante

4.2.2 Anneaux dont l'épaisseur varie selon ε

Ces capes ont été dessinées pour que l'épaisseur de chaque anneau suive la même évolution que ε_r. En effet, d'après 3.1, ε_r varie selon r. La relation est bijective, et la bijection réciproque est :

$$\frac{{R_2}^2 (r - R_1)^2}{(R_2 - R_1)^2 r^2}$$

Afin d'automatiser le calcul des rayons nous avons utiliser un petit script maple. Les résultats sont présentés ci-après.



(a) Recu - 8rings - ε=100 - 1GHz

(b) Champ diffracté : Recu - 8rings - ε=100 - 1GHz

(c) Regu - 15rings - ε=100 - 1GHz

(d) Champ diffracté : Recu - 15rings - ε=100 - 1GHz

FIGURE 4.3 – Cape récursive - Modèle développé par M.Farhat

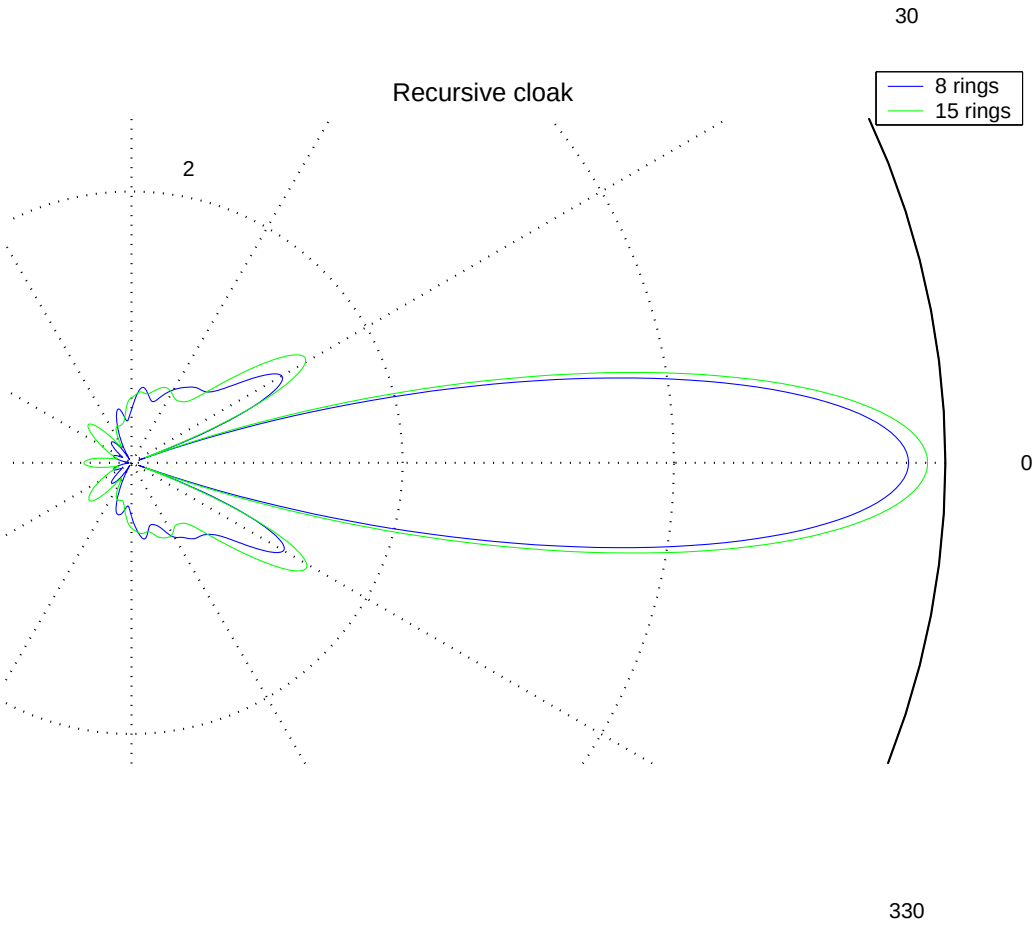
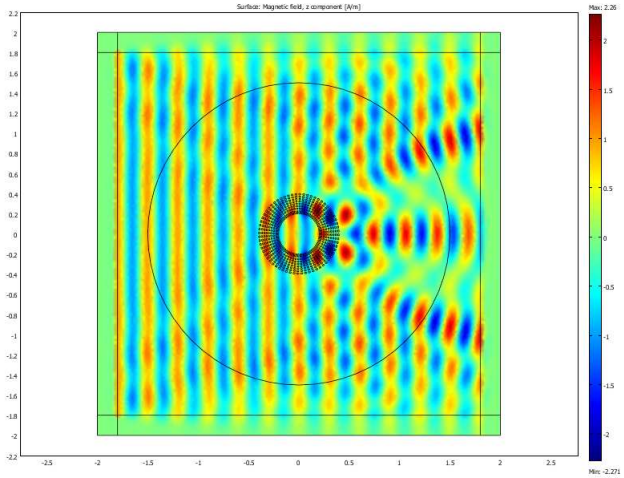


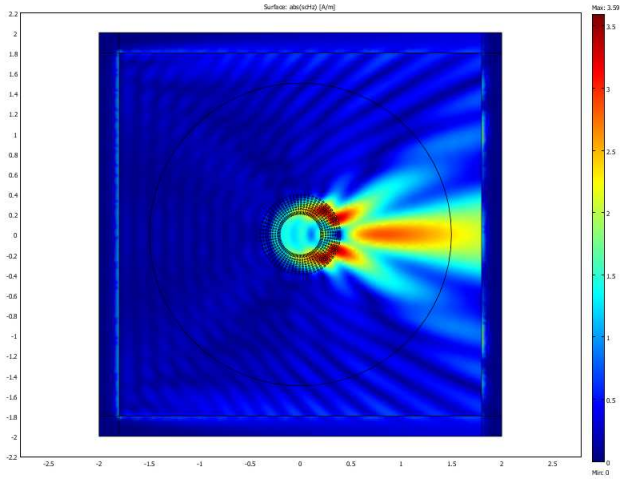
FIGURE 4.4 – Champs diffractés en coordonnées polaires

4.2.3 Cape dont les motifs de base s'approchent de carrés

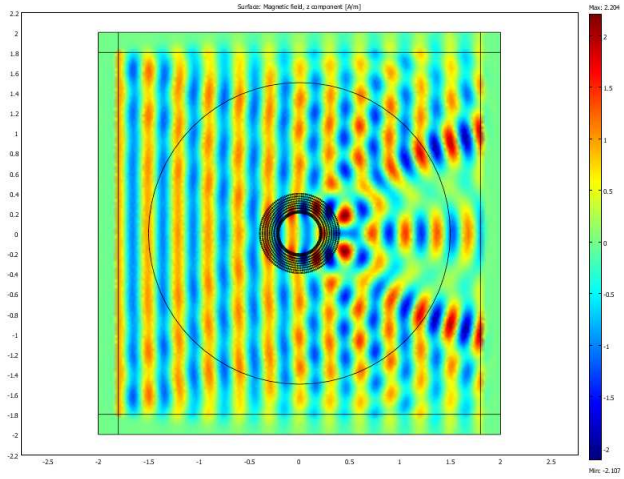
Ces capes ont été dessinées pour que le calcul d'homogénéisation soit le plus proche possible de la réalité. Pour cela il fallait que les motifs de base soient carrés. Ainsi, l'abscisse curviligne de chaque motif doit-elle valoir environ l'épaisseur de l'anneau auxquel il appartient.



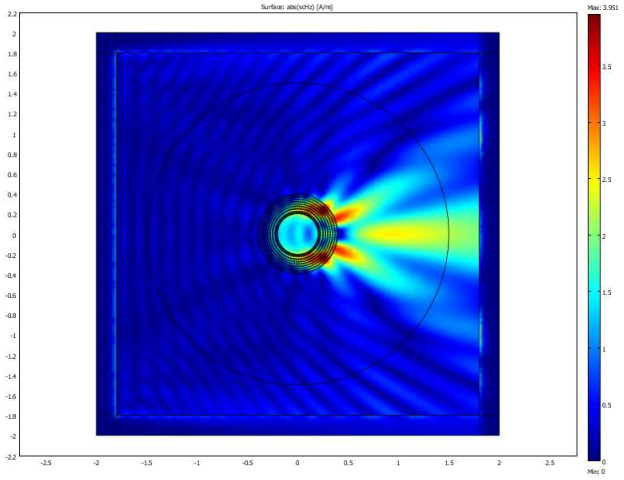
(a) Ani - 8rings - 32rayons - ε=100 - 1GHz



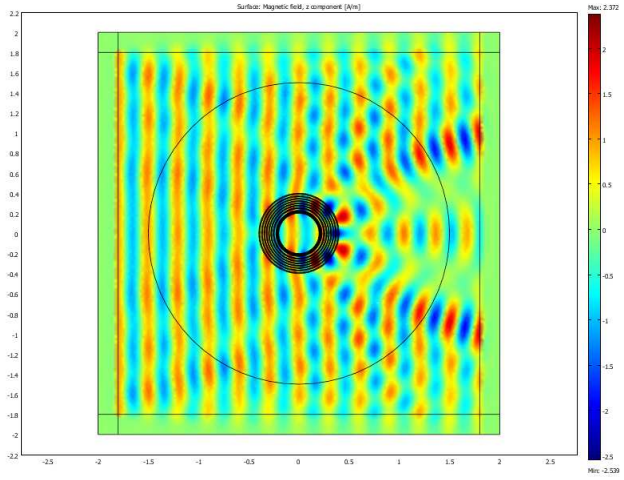
(b) Champ diffracté : Ani - 8rings - 32rayons - ε=100 - 1GHz



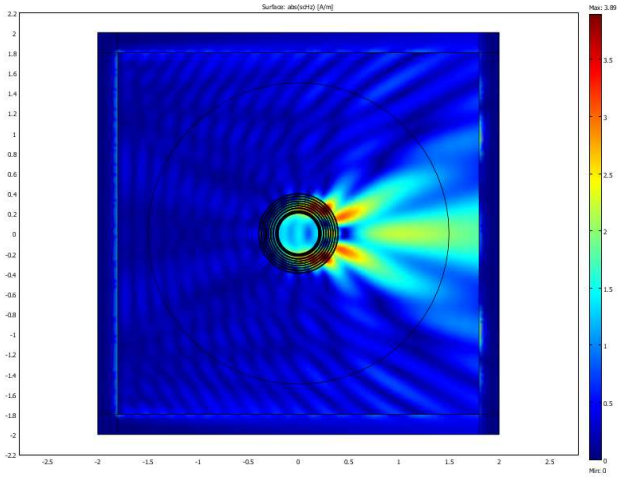
(c) Ani - 8rings - 64rayons - ε=100 - 1GHz



(d) Champ diffracté : Ani - 8rings - 64rayons - ε=100 - 1GHz



(e) Ani - 8rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz



(f) Champ diffracté : Ani - 8rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz

FIGURE 4.5 – Cape anisotrope avec 8 anneaux

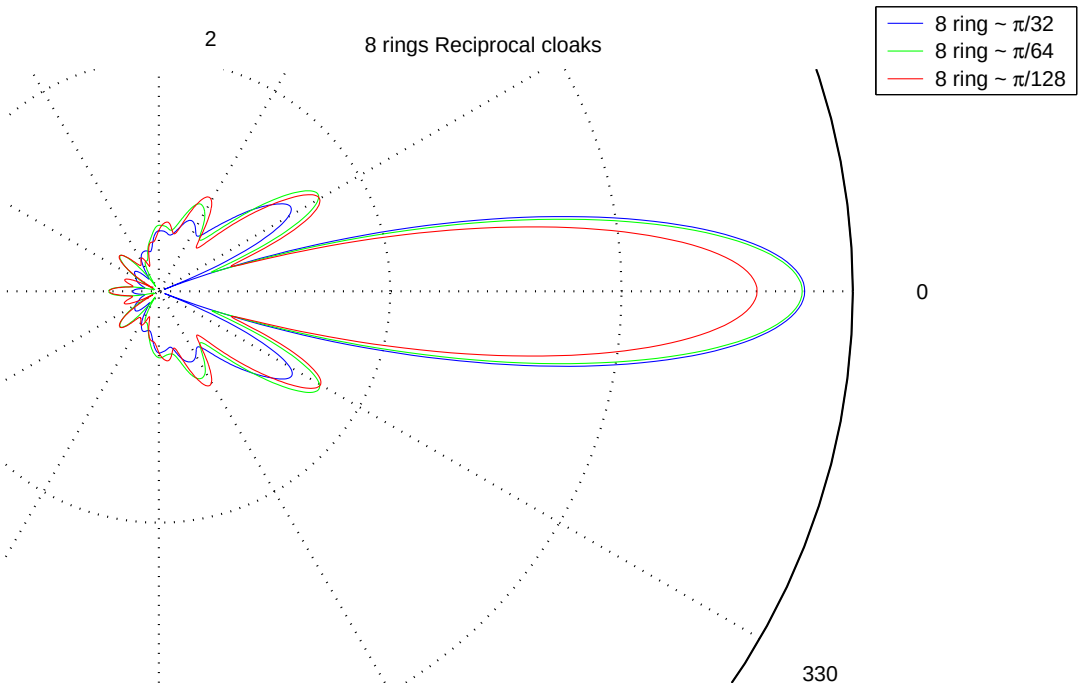
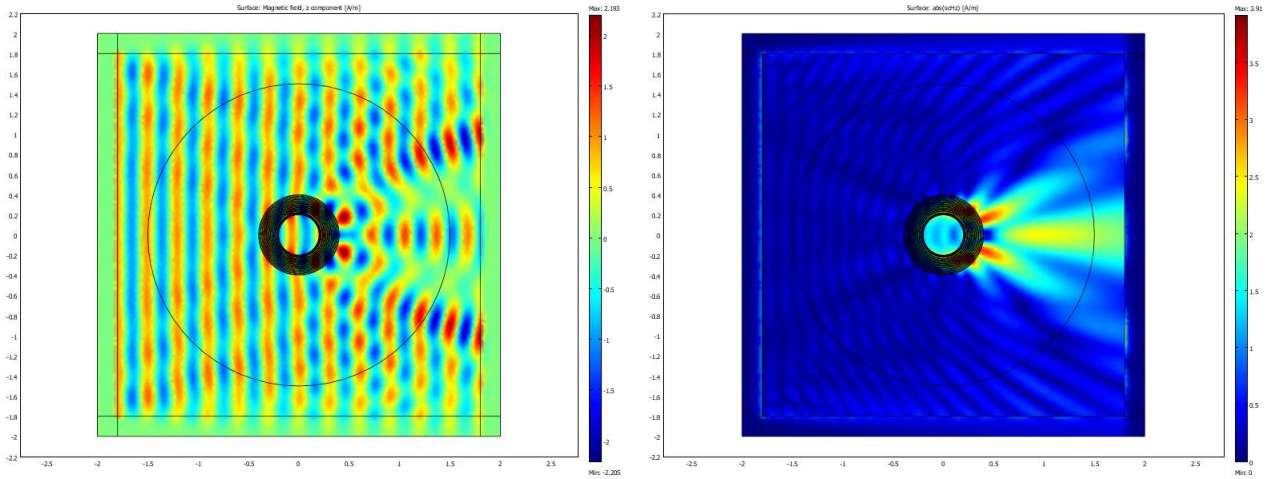


FIGURE 4.6 – Champs diffractés en coordonnées polaires



(a) Ani - 8rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz

(b) Champ diffracté : Ani - 13rings - 128rayons - ε=100 - 1GHz

FIGURE 4.7 – Cape anisotrope avec 13 anneaux

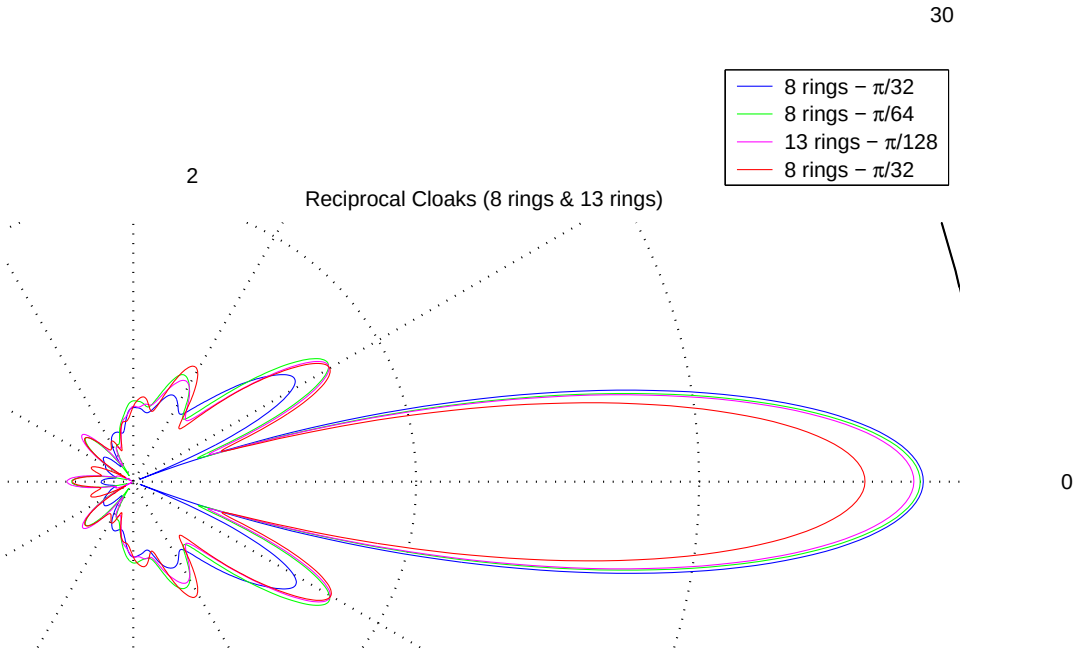


FIGURE 4.8 – Champs diffractés en coordonnées polaires

Chapitre 5

Cape d'invisiblité tournante

La cape mise au point par Pendry n'utilise qu'un changement de variable, celui selon r. Il est toutefois possible d'effectuer de nombreux autres changements de variables afin d'obtenir des capes différentes. Ces points ont été étudiés plus précisément par Rahm et al. [8]. Cependant, il est esthétiquement parlant très intéressant de concevoir des capes avec quelques variations par rapport à la cape imaginée par Pendry.

Dans ce chapitre il est question d'une cape "tournante", c'est-à-dire que le cette cape cylindrique a subi un changement de variable selon r et selon θ. Ainsi, on peut la représenter mentalement par un disque externe au centre duquel un disque de vide se crée en tourbillonant. Le changement de variable est le suivant :

$$\begin{aligned} r' &= R_{int} + r\frac{R_{ext} - R_{min}}{R_{ext}} \\ \theta' &= \theta + r\frac{\theta_{rot}}{R_{int} - R_{ext}} - \theta_{rot}\frac{R_{ext}}{R_{int} - R_{ext}} \\ z' &= z \end{aligned}$$

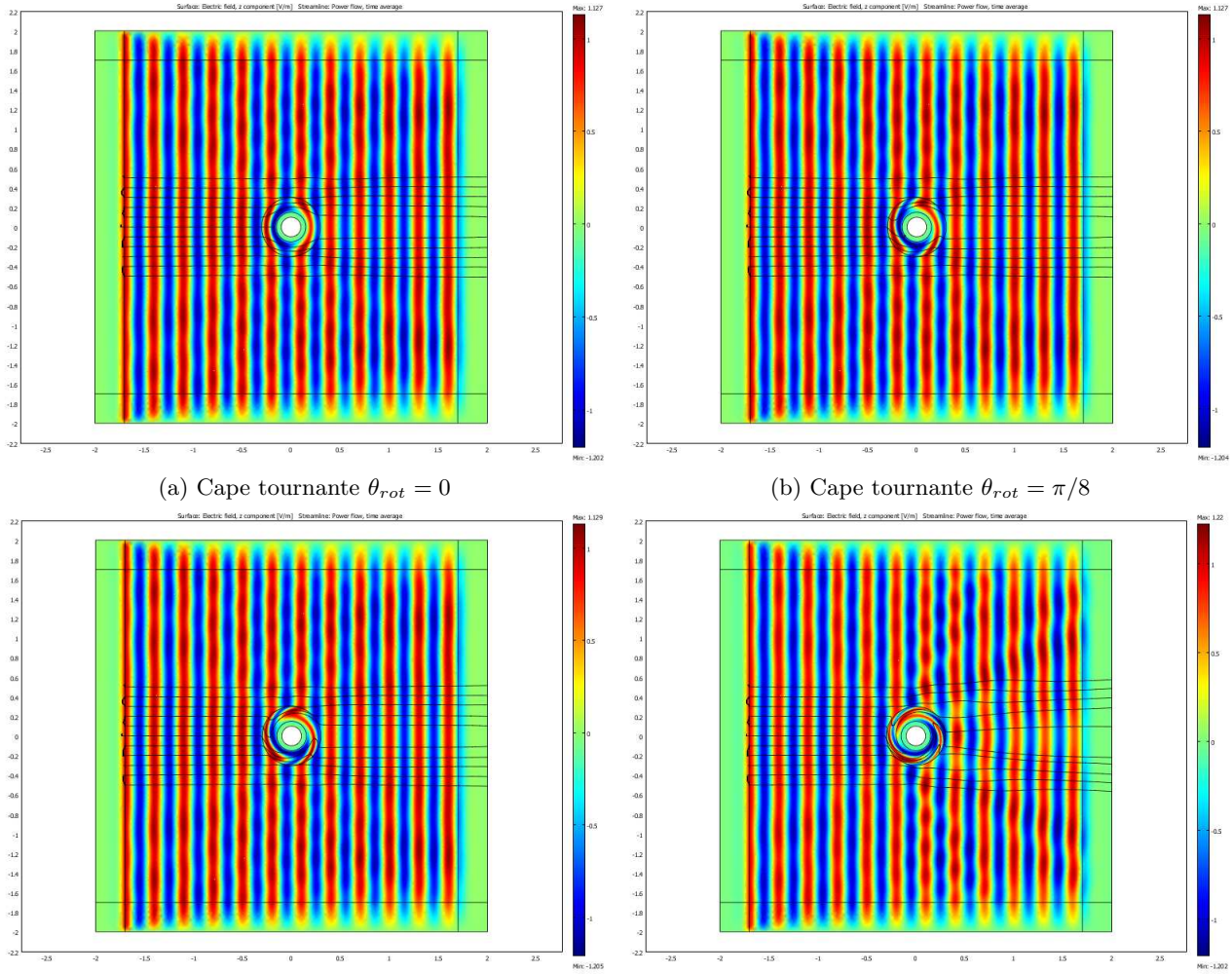
Où θ_{rot} est l'angle dont on fait tourner le cercle du centre.

En reprenant les calculs de la partie 2 à la page 4, on obtient le jacobien suivant :

$$J_{r,r'} = \begin{pmatrix} \frac{R_{ext}}{R_{ext}-R_{int}} & 0 & 0 \\ \frac{\theta_{rot}\, R_{ext}}{(R_{ext}-R_{int})^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Nous ne donnerons pas l'expression de cette matrice en coordonées cartésienne (plutôt rebutante), mais il est possible de l'utiliser dans le logiciel COMSOL, et on obtient les résultats suivants, obtenus pour diverses valeurs de θ_{rot}.

Les résultats obtenus nécessitent un maillage assez fin du domaine si l'on désire atteindre une convergence de la solution.



(a) Cape tournante $\theta_{rot} = 0$

(b) Cape tournante $\theta_{rot} = \pi/8$

(c) Cape tournante $\theta_{rot} = \pi/4$

(d) Cape tournante $\theta_{rot} = \pi/2$

FIGURE 5.1 – Cape tournante parfaite testée pour plusieurs valeurs de θ_{rot}

Annexe A

Mise en pratique de l'homogénéisation

A.1 Intérêt de l'homogénéisation

Nous venons de voir dans la partie précédente quelles devaient être les propriétés présentées par la cape d'invisibilité. Nous devons à présent essayer de savoir si il est possible d'en fabriquer une de manière concrète. En reprenant les travaux de Mohamed Farhat [5], on s'aperçoit qu'une structure circulaire peut permettre d'obtenir un résultat qui ne s'éloigne pas trop de ce que l'on recherche. Avant de comprendre le fonctionnement de la structure il est nécessaire de s'attarder sur la théorie mathématique à l'origine du design de la structure. Des précisions sur les aspects mathématiques seront trouvés dans l'article de Sébastien Guenneau et de Frédéric Zolla[4].

La théorie de l'homogénéisation permet de calculer les propriétés globales (≪ homogénéisées ≫) d'un milieu comme un cristal ou possédant de fortes symétries. L'étude se base sur la répétition des motifs pour établir mathématiquement un moyenne sur les propriétés électromagnétiques usuelles (permittivité et perméabilité) du matériau. Cette méthode se base en grande partie sur une expansion double échelle, méthode mathématique (dont on peut trouver les détails dans [2]) qui permet de tenir compte à la fois de l'aspect macroscopique du réseau et de l'aspect microscopique.

L'homogénéisation va donc servir dans notre cas à vérifier qu'une structure proposée possède bien les paramètres calculés dans la partie sur les propriétés théorique de la cape, page 4.

A.2 Présentation du problème : notations, définitions

Dans la suite de ce documment nous allons étudier un matériaux de symétrie cylindrique. Ce dernier est composé de cellules de base qui se répètent spatialement avec une période selon r et une période selon θ.

Définition 2:
On notera $\mathbf{Y}$ une cellule de base, de secteur 1.
On notera $\eta\mathbf{Y}$ la même cellule que l'on a contracté grâce à une homotéthie de facteur η.
On notera Ω_f l'ensemble du domaine étudié (ici il s'agira de la cape d'invisibilité centrée sur (0,0)).
On notera Ω_η le recouvrement maximal de Ω_f effectué par des cellules $\eta\mathbf{Y}$.
On notera N_η le nombre de cellules qui composent Ω_η

Proposition 1. $\Omega_{\eta=0} = \Omega_f$

Démonstration. En effet, si η tend vers 0, la taille des cellules tend vers 0. Ainsi si $\eta = 0$ le recouvrement de Ω_η est infinitesimal, et vaut donc Ω_f □

Proposition 2. $N_\eta \approx \dfrac{Mesure(\Omega_f)}{\eta^3}$

Démonstration. En effet : $N_\eta = \dfrac{Mesure(\Omega_\eta)}{Mesure(\eta\mathbf{Y})} = \dfrac{Mesure(\Omega_\eta)}{\eta^3} \approx \dfrac{Mesure(\Omega_f}{\eta^3}$ □

Définition 3:
On notera **B** un obstacle diffractant qui se trouve dans chaque cellule. En particulier, on aura dans notre cas des cellules constituées de métal et d'air, et **B** représentera les inclusions métalliques.
On notera $\mathbf{B}_\eta$ le résultat de l'homotéthie de rapport η appliquée à **B**.
On notera ε

Dans notre cas on peut introduire $\tilde{\varepsilon}$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}^3, \varepsilon_r^{B_\eta}(x) = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}(x), \text{si } x \in \overline{\Omega_\eta} \\ 1 \quad , \quad sinon \end{cases}$
Où $\tilde{\varepsilon}$ est une fonction continue par morceaux à valeurs complexes qui représente la permitivité relative dans l'espace physique.

Proposition 3. $\varepsilon_r^{B_\eta}(x) = \varepsilon_r^B(\frac{x}{\eta})$

Démonstration. Il s'agit juste d'un changement d'echelle. □

On pose ensuite $y = \frac{x}{\eta}$, et on introduit la notation suivante :

Définition 4:
On notera $\varepsilon_\eta(x) = \tilde{\varepsilon}(x, \frac{x}{\eta}) = \tilde{\varepsilon}(x, y) = \begin{cases} 1 \quad , \text{si } x \in \overline{\Omega_\eta} \\ \varepsilon_r^{B_\eta}(y), \quad sinon \end{cases}$

La première variable concerne les propriétés macroscopiques du matériau, tandis que la deuxième variable concerne les propriétés microscopiques (c'est-à-dire de la cellule de base).

A.3 Le problème

Le problème que l'on se pose est le suivant : déterminer le champ électromagnétique $F_\eta = (E_\eta, H_\eta)$ dans l'espace. Si l'on remarque que la structure étudiée ne couvre pas tout l'espace, on notera que l'on peut définir rigoureusement le champ diffracté F_η^d et le différencier du champ incident F_η^i. On observe alors la relation suivante :

$$F_\eta = F_\eta^d + F_\eta^i$$

Le but est de déterminer le comportement du champ F_η pour une longueur d'onde λ donnée, lorsque η tend vers 0 (et donc quand le nombre de cellules tend vers l'infini).

Si l'on définit le champ électrique par : $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})e^{i\omega t}$ on a alors à résoudre le problème suivant :

$$\mathcal{P}_\eta = \begin{cases} \nabla \times E_\eta + & i\omega\mu_0 H_\eta = & 0 \\ \nabla \times H_\eta - & i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\eta E_\eta = & 0 \\ k_0 E_\eta^d + \omega\mu \left(\frac{x}{|x|} \times H_\eta^d\right) & = \mathrm{o}\left(\frac{1}{|x|}\right) & \\ H_\eta^d = & \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad , & E_\eta^d = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \end{cases}$$

On reconnait dans les deux premières lignes les équations de Maxwell dérivées dans le cas harmonique. Les deux dernières lignes correspondent aux conditions de Silver Müller et permettent d'assurer l'existence et l'unicité des solutions du problème (voir [3] pour plus d'indications).

En prenant le rotationel de cette expression, on arrive à deux problèmes similaires :

$$\mathcal{P}_\eta^e = \begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{E}_\eta - k_0^2 \varepsilon_\eta \overrightarrow{E}_\eta) = 0 \\ \overrightarrow{E}_\eta^d = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \frac{x}{|x|} \times (\nabla \times \overrightarrow{E}_\eta^d) + ik \overrightarrow{E}_\eta^d = \mathrm{o}(\frac{1}{|x|}) \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_\eta^H = \begin{cases} \nabla \times (\varepsilon^{-1} \nabla \times H_\eta - k_0^2 H_\eta) = 0 \\ H_\eta^d = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \frac{x}{|x|} \times (\nabla \times \overrightarrow{H}_\eta^d) + ik \overrightarrow{H}_\eta^d = \mathrm{o}(\frac{1}{|x|}) \end{cases}$$

Ces relations sont obtenues en considérant les équations de Maxwell, et en posant $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

On remarquera que, d'après les équations de Maxwell : $\nabla \cdot H_\eta = 0$ alors que $\nabla \cdot \varepsilon_\eta E_\eta = \varepsilon_\eta \nabla \cdot E_\eta + \nabla(\varepsilon_\eta)E_\eta = 0$. Ainsi on préferrera résoudre $\mathcal{P}_\eta^H$. On résoudra donc le deuxième problème, et l'on calculera E_η à partir de : $E_\eta = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_\eta}\nabla \times \overrightarrow{H}_\eta$

Dans la suite de ce document nous allons nous intéresser au cas où η tend vers 0. Dans ce cas, la solution du problème se rapproche de la limite dite « homogénéisée » correspondant à : $\mathcal{P}_\eta^H \xrightarrow[\eta\to 0]{} \mathcal{P}_\eta^{H_{hom}}$. Cela revient à résoudre un problème annexe d'electrostatique défini par :

$$\mathcal{P}_\eta^{H_{hom}} = \begin{cases} \nabla \times (\varepsilon_{hom}^{-1}\nabla \times H_{hom} - k_0^2 H_{hom}) = 0 \\ H_{hom}^d = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \frac{x}{|x|} \times (\nabla \times \overrightarrow{H}_{hom}^d) + ik\overrightarrow{H}_{hom}^d = \mathrm{o}(\frac{1}{|x|}) \end{cases}$$

Avec :

$$\varepsilon_{hom}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \in \overline{\Omega_f} \\ \langle \varepsilon(x,y)(I - \nabla_y V_Y(y)) \rangle_y & , \text{si } x \in \Omega_f \end{cases}$$

Et où $V_Y = (V_1, V_2, V_3)$ sont les uniques solutions dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^1(Y)$ du problème donné dans [4].

Annexe B

Description du champ diffracté à l'infini

Pour savoir si une cape marche plus ou moins efficacement qu'une autre cape, il est intéressant d'étudier le champ diffracté à l'infini. Nous allons donc tenter d'obtenir le champ diffracté à l'infini. tout d'abord, donnons une définition du champ diffracté :

Définition 5:
Champ diffracté = Champ total - Champ incident

Considéront le problème de Helmholtz classique :

$$\triangle u + ku^2 = 0 \tag{B.1}$$

Les solutions s'expriment avec les fonctions de Bessel :

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[i^n a_n J_n(kr) + b_n H_n^+(kr)\right] e^{in\theta} \tag{B.2}$$

Les solutions sont donc constituées de deux parties. La première partie ($a_n J_n(kr)$) correspond à des solutions régulières et sans singularité. La deuxième partie ($b_n H_n^+(kr)$) correspond a des solutions sortantes avec singularité à l'origine. avant de poursuivre voici un bref rappel sur les fonctions de Bessel :

Définition 6:
Les fonctions de Bessel s'écrivent J_n, les fonctions de Hankel s'écrivent Y_n et forment une base des solutions de l'équation :

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0$$

où ν est un paramètre réel, et x la variable de dérivation.
On définit grâce à elles les fonctions de Hankel :

$$\begin{aligned} H_n^+ &= J_n + iY_n \\ H_n^- &= J_n - iY_n \end{aligned}$$

Pour étudier la diffraction d'un système, on ne considérera que les solutions ondes sortantes. Ainsi, on ne sommera que sur le terme H_n^+.

On étudiera dans cette annexe le cas d'un cylindre diffractant. Celui-ci est composé d'un matériau tel que $H_z = 0$ à sa frontière. Ainsi, si l'on note a le rayon de ce cylindre, on obtient la relation suivante à sa frontière :

$$u(r,\theta) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(i^n J_n(ka) + b_n H_n^+(ka)\right) e^{in\theta}$$

D'où :

$$b_n = -i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^+(ka)}$$

On peut alors l'intégrer dans le terme d'onde sortante correspondant au champ diffracté.

$$H_z^{sc}(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^+(ka)} H_n^+(kr) e^{in\theta}$$

Comme le champ diffracté à l'infini s'écrit : $H_z^{sc}(r,\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{} H_z^{sc-far}(\theta)$, et que :

$$H_n^+(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}} i^{-n-1/2}$$

On obtient :

$$H_z^{sc-far}(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i^{-1/2} \frac{J_n(ka)}{H_n^+(ka)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}} e^{in\theta}$$

$$H_z^{sc-far}(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (i-1) \frac{J_n(ka)}{H_n^+(ka)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{\pi kr}} e^{in\theta}$$

Donc, le module de ce champ est donné par :

$$\left|H_z^{sc-far}(r,\theta)\right| = \frac{\sqrt{2}}{\pi kr} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i^{-1/2} \frac{J_n(ka)}{H_n^+(ka)} e^{in\theta} \right|$$

Enfin, on trouve cette amplitude en utilisant la définition de l'amplitude de diffusion en champ lointain [6] :

$$|f(\theta)| = \frac{2}{\pi kr} \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i^{-1/2} \frac{J_n(ka)}{H_n^+(ka)} e^{in\theta}$$

Nous avons vérifié l'adéquation entre ce calcul et le résultat renvoyé par Comsol Multiphysics. La figure se trouve ci-dessous. On retrouve un résultat similaire à une constante mutliplicative près. Ceci est dû à une incertitude sur la méthode de calcul utilisée par Comsol.

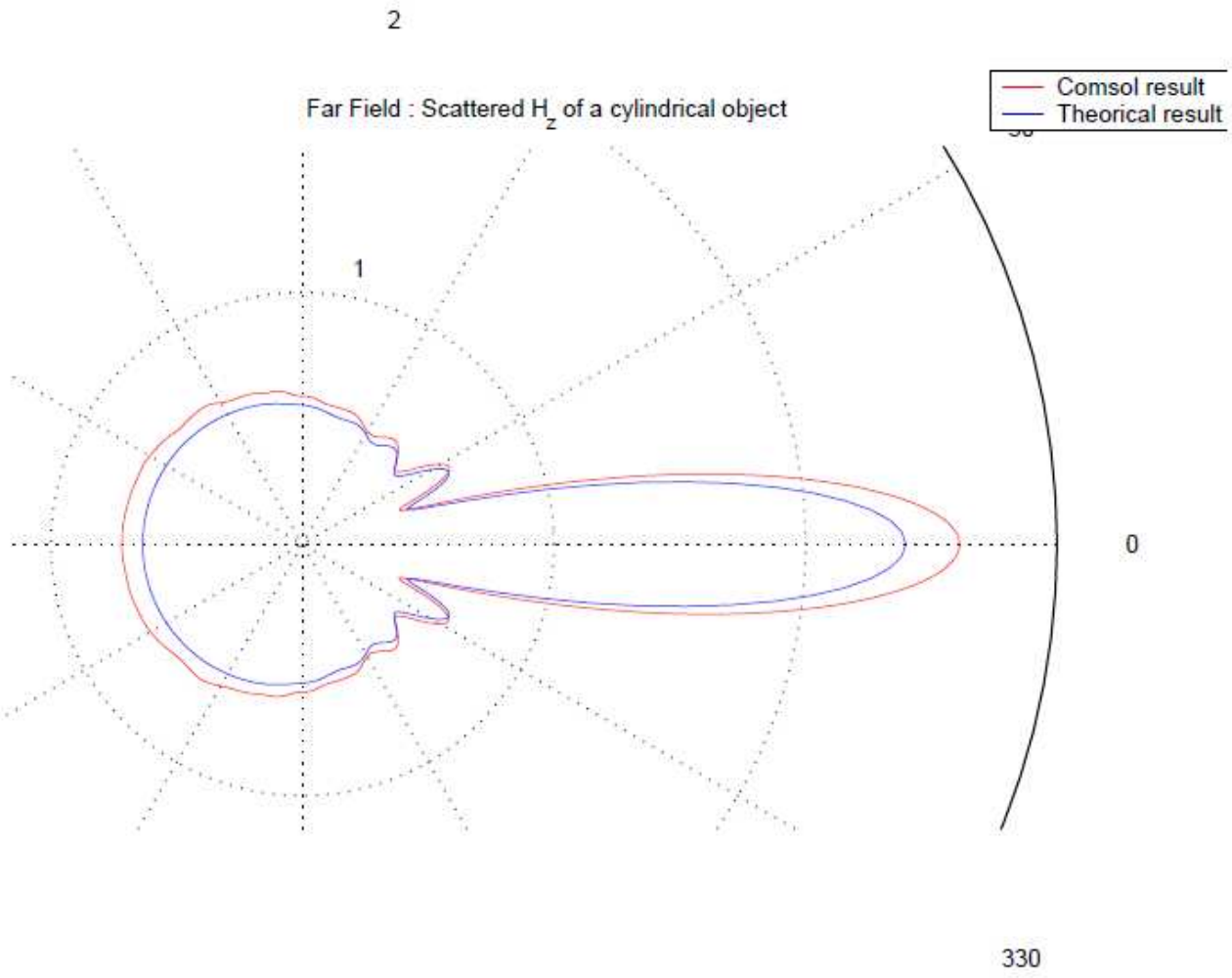


FIGURE B.1 – Champ diffracté théorique et obtenu par Comsol

Bibliographie

[1] Y. Agha : Transformations geometriques reelles et complexes : applications a la recherche de modes a pertes dans des fibres optiques microstructurees., 2007.

[2] G. Allaire : Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6):1482–1518, 1992.

[3] M. Cessenat : *Mathematical methods in electromagnetism : linear theory and applications*. Singapore ; River Edge, NJ : World Scientific, 1996.

[4] S. Guenneau et F. Zolla : Homogenization of three-dimensional finite photonic crystals. *Progress In Electromagnetics Research*, 27(27):91–127, 2000.

[5] A.B. Movchan M. Farhat, S. Guenneau et S. Enoch : Achieving invisibility over a finite range of frequencies. *Opt. Express*, 16(8):5656–5661, 2008.

[6] A.N. Norris et C. Vemula : Scattering of flexural waves on thin plates. *Journal of Sound and Vibration*, 181(1):115–125, 1995.

[7] J. B. Pendry, D. Schurig et D. R. Smith : Controlling electromagnetic fields. *Science*, 312(5781):1780–1782, 2006.

[8] M. Rahm, D. Schurig, D.A. Roberts, S.A.Cummer, D.R. Smith et J.B. Pendry : Design of electromagnetic cloaks and concentrators using form-invariant coordinate transformations of maxwell's equations. *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, 6(1):87–95, avril 2008.

[9] S.M. Rytov : Electromagnetic properties of a finely stratified medium. *Journal of Experimental Theorical Physics*, 29:605–616, November 1955.

[10] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr et D. R. Smith : Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801):977–980, 2006.

[11] V.G. Veselago : The electromagnetics of substances with simultaneously negative values of ε and μ ;. *Soviet Physics Uspekhi*, 10(4):509–514, 1968.

[12] A.V. Kildishev W. Cai, U.K. Chettiar et V.Shalaev : Optical cloaking with metamaterials. *Nat Photon*, 1(4):224–227, avril 2007.

[13] Y. Feng Y. Huang et T. Jiang : Electromagnetic cloaking by layered structure ofhomogeneous isotropic materials. *Opt. Express*, 15(18):11133–11141, 2007.

[14] F. Zolla, S. Guenneau, A. Nicolet et J. B. Pendry : Electromagnetic analysis of cylindrical invisibility cloaks and the mirage effect. *Opt. Lett.*, 32(9):1069–1071, 2007.