

Décroissance des fonctions de corrélations pour des systèmes quantiques de spins à symétrie continue

Travail réalisé avec Michel Rouleux

Jean-Christophe Lavocat

Ecole Centrale Marseille
M2 Physique Théorique : Luminy

4 *Novembre* 2008

Sommaire

1 Introduction

2 Généralités

3 Modèle de Hubbard

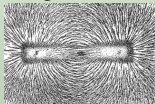
4 Modèle XY

5 Conclusion

Introduction

Aperçu

Magnétisme

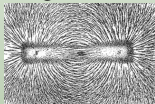


- Propriété due aux moments magnétiques

Introduction

Aperçu

Magnétisme

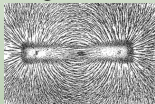


- Propriété due aux moments magnétiques
- En l'absence d'interaction inter-atomique :

Introduction

Aperçu

Magnétisme

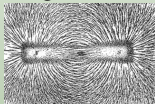


- Propriété due aux moments magnétiques
- En l'absence d'interaction inter-atomique :
 - ▶ Température

Introduction

Aperçu

Magnétisme

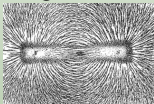


- Propriété due aux moments magnétiques
- En l'absence d'interaction inter-atomique :
 - ▶ Température
 - ▶ \vec{B} (para/diamagnétique)

Introduction

Aperçu

Magnétisme



- Propriété due aux moments magnétiques
- En l'absence d'interaction inter-atomique :
 - ▶ Température
 - ▶ \vec{B} (para/diamagnétique)

Pour un e^- , le moment magnétique associé au spin \vec{S} est :

$$\vec{\mu}_s = -g\mu_B \vec{S} \quad (\text{où } \mu_B = \frac{eh}{2m} : \text{le magnéton de Bohr})$$

Introduction

Les interactions

Dans notre cas, les particules du système sont en interaction

⇒ les e^- agissent sur leurs voisins.

Modèle simple : **Heisenberg**

Introduction

Les interactions

Dans notre cas, les particules du système sont en interaction
 \Rightarrow les e^- agissent sur leurs voisins.

Modèle simple : **Heisenberg**

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

i et j sont les sites du réseau périodique $\Lambda \subset \mathbf{Z}^2$

t_{ij} représente les interactions entre les sites

Introduction

Les interactions

Dans notre cas, les particules du système sont en interaction
 \Rightarrow les e^- agissent sur leurs voisins.

Modèle simple : **Heisenberg**

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

i et j sont les sites du réseau périodique $\Lambda \subset \mathbf{Z}^2$

t_{ij} représente les interactions entre les sites

Dans nos calculs : $t_{ij} = 0$ si $\|i - j\|_1 > R$ (norme ℓ_1 sur le réseau)

Dans cette présentation $t_{ij} = 0$ si $\|i - j\|_1 > R$ (hypothèse des *plus proches voisins*), et $t_{ij} = t = 1$

Introduction

Les modèles considérés

Modèle XY (rotateur plan)

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y$$

Introduction

Les modèles considérés

Modèle XY (rotateur plan)

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Introduction

Les modèles considérés

Modèle XY (rotateur plan)

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites périodiques ($\Lambda \subset (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2$)

Introduction

Les modèles considérés

Modèle XY (rotateur plan)

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites périodiques ($\Lambda \subset (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2$)

Associé à la Symétrie $O(2)$

Introduction

Les modèles considérés

Modèle XY (rotateur plan)

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites périodiques ($\wedge \subset (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2$)

Associé à la Symétrie O(2)

Modèle de Hubbard

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + V(n_{i,\sigma}) + \langle h.S \rangle$$

Introduction

Les modèles considérés

Modèle XY (rotateur plan)

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites périodiques ($\wedge \subset (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2$)

Associé à la Symétrie O(2)

Modèle de Hubbard

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + V(n_{i,\sigma}) + \langle h.S \rangle$$

$c_i^{x\dagger}$ (c_i^x) : opérateur création (annihilation) de fermion de spin x au site i

Annihilation en j , Création en $i \Rightarrow$ conservation du nombre de fermions

Introduction

Les modèles considérés

Modèle XY (rotateur plan)

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites périodiques ($\wedge \subset (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^2$)

Associé à la Symétrie O(2)

Modèle de Hubbard

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + V(n_{i,\sigma}) + \langle h.S \rangle$$

$c_i^{x\dagger}$ (c_i^x) : opérateur création (annihilation) de fermion de spin x au site i

Annihilation en j , Création en $i \Rightarrow$ conservation du nombre de fermions

2 termes : **cinétique** ($t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$) et **potentiel** (electrique $V(n_{i,\sigma})$ et magnétique $\langle h.S \rangle$)

Introduction

L'état de Gibbs

On assimile le réseau infini à un réseau fini périodique L . La probabilité dans cet état est donnée par :

$$\langle A \rangle_L = \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H_L})}{\text{Tr}(e^{-\beta H_L})}$$

Introduction

L'état de Gibbs

On assimile le réseau infini à un réseau fini périodique L . La probabilité dans cet état est donnée par :

$$\langle A \rangle_L = \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H_L})}{\text{Tr}(e^{-\beta H_L})}$$

On admettra que pour passer au réseau infini (observable quasi-locale A) :

$$\langle A \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle A \rangle_L$$

Sommaire

1 Introduction

2 Généralités

3 Modèle de Hubbard

4 Modèle XY

5 Conclusion

Généralités

Définitions

Definition

$\beta = \frac{1}{k_B T}$: inverse de la température x c^{te} Boltzmann

Généralités

Définitions

Definition

$\beta = \frac{1}{k_B T}$: inverse de la température x c^{te} Boltzmann

Definition

Opérateurs de création/annihilation :

Création au site x : $c_x^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Annihilation $c_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Généralités

Définitions

Definition

$\beta = \frac{1}{k_B T}$: inverse de la température x c^{te} Boltzmann

Definition

Opérateurs de création/annihilation :

Création au site x : $c_x^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Annihilation $c_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definition

Opérateur de nombre de particules :

$$n_x = c_x^\dagger c_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Généralités

Définitions

Definition

Le "vide" :

$$|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Généralités

Définitions

Definition

Le "vide" :

$$|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Effets des opérateurs de création/annihilation :

$$\text{Création : } \langle c_x^\dagger |\Omega\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Annihilation } \langle c_x |\Omega\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Généralités

Commutation

Propriétés

Fermions :

$$[c_x, c_y^\dagger]_+ = \delta_{xy}$$

Généralités

Commutation

Propriétés

Fermions :

$$[c_x, c_y^\dagger]_+ = \delta_{xy}$$

Bosons :

$$[c_x, c_y^\dagger] = \delta_{xy}$$

Généralités

Commutation

Propriétés

Fermions :

$$[c_x, c_y^\dagger]_+ = \delta_{xy}$$

Bosons :

$$[c_x, c_y^\dagger] = \delta_{xy}$$

Propriétés

Fermions :

$$c_x^\dagger n_x = 0$$

$$n_x c_x^\dagger = c_x^\dagger$$

Généralités

Commutation

Propriétés

Fermions :

$$[c_x, c_y^\dagger]_+ = \delta_{xy}$$

Bosons :

$$[c_x, c_y^\dagger] = \delta_{xy}$$

Propriétés

Fermions :

$$c_x^\dagger n_x = 0$$

$$n_x c_x^\dagger = c_x^\dagger$$

$$[n_x, c_x^\dagger]_+ = c_x^\dagger$$

$$[n_x, c_x^\dagger] = c_x^\dagger(1 - 2n_x) = c_x^\dagger$$

Sommaire

1 Introduction

2 Généralités

3 Modèle de Hubbard

- Le théorème de décroissance
- Lemme de commutation
- Majoration de la trace
- Noyau de Poisson

4 Modèle XY

5 Conclusion

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Simplifications

Rappel :

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + V(n_{i,x}) + \langle h.S \rangle$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Simplifications

Rappel :

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + V(n_{i,x}) + \underline{\langle h.S \rangle}$$

Hypothèses : pas de champ magnétique interne ($h=0$)

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Simplifications

Rappel :

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + \underline{V(n_{i,x})} + \langle h.S \rangle$$

Hypothèses : pas de champ magnétique interne ($h=0$), pas d'interaction ($V=0$)

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Simplifications

Rappel :

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + V(n_{i,x}) + \langle h.S \rangle$$

Hypothèses : pas de champ magnétique interne ($h=0$), pas d'interaction ($V=0$), plus proches voisins ($t=1$).

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Simplifications

Rappel :

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + V(n_{i,x}) + \langle h.S \rangle$$

Hypothèses : pas de champ magnétique interne ($h=0$), pas d'interaction ($V=0$), plus proches voisins ($t=1$).

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Théorème à prouver

Théorème

$\exists \alpha, \delta \in \mathbb{R}$ et $f(\beta)$ telle que :

$$f(\beta) \approx \frac{1}{\beta} \text{ si } \beta \gg \delta \text{ et } f(\beta) \approx \frac{2}{\delta} |\log(\beta)| \text{ si } \beta \ll \delta$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Théorème à prouver

Théorème

$\exists \alpha, \delta \in \mathbb{R}$ et $f(\beta)$ telle que :

$$f(\beta) \approx \frac{1}{\beta} \text{ si } \beta \gg \delta \text{ et } f(\beta) \approx \frac{2}{\delta} |\log(\beta)| \text{ si } \beta \ll \delta$$

Tels que l'on ait :

$$\left| \langle c_{x,\uparrow}^\dagger c_{x,\downarrow}^\dagger c_{y,\uparrow} c_{y,\downarrow} \rangle \right| \leq 2 |x - y|^{-\alpha f(\beta)}$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme : Traces et Dilatation analytique

Symétrie U(1) du modèle de Hubbard :

$$G_\theta = \prod_{u,\sigma} e^{-i\theta_u n_{u,\sigma}}$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme : Traces et Dilatation analytique

Symétrie U(1) du modèle de Hubbard :

$$G_\theta = \prod_{u,\sigma} e^{-i\theta_u n_{u,\sigma}}$$

Lemme

$$\text{Tr}(Ae^{-\beta H}) = \text{Tr}(G_\theta A G_\theta^{-1} e^{-\beta G_\theta H G_\theta^{-1}})$$

Démonstration.

En insérant plusieurs fois la matrice $I_n = G_\theta G_\theta^{-1}$ □

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme : Hamiltonien et Dilatation analytique

Symétrie U(1) du modèle de Hubbard :

Lemme

$$G_\theta H G_\theta^{-1} = - \sum_{u,v,\mu} e^{-i(\theta_u - \theta_v)} c_{u,\mu}^\dagger c_{v,\mu}$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme : Hamiltonien et Dilatation analytique

Symétrie U(1) du modèle de Hubbard :

Lemme

$$G_\theta H G_\theta^{-1} = - \sum_{u,v,\mu} e^{-i(\theta_u - \theta_v)} c_{u,\mu}^\dagger c_{v,\mu}$$

Démonstration.

$$G_\theta H G_\theta^{-1} = - \prod_{v,\mu} e^{-i\theta_v n_{v,\mu}} \sum_{i,j,\mu} c_{i,\mu}^\dagger c_{j,\mu} \prod_{u,\mu} e^{i\theta_u n_{u,\mu}}$$

$$G_\theta H G_\theta^{-1} = - \prod_{v \neq i,\mu} e^{-i\theta_v n_{v,\mu}} \sum_{i,j,\mu} e^{-i\theta_i n_{i,\mu}} c_{i,\mu}^\dagger c_{j,\mu} e^{i\theta_j n_{j,\mu}} \prod_{u \neq j,\mu} e^{i\theta_u n_{u,\mu}}$$

... à suivre



Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme : Hamiltonien et Dilatation analytique

Symétrie U(1) du modèle de Hubbard :

Lemme

$$G_\theta H G_\theta^{-1} = - \sum_{u,v,\mu} e^{-i(\theta_u - \theta_v)} c_{u,\mu}^\dagger c_{v,\mu}$$

Démonstration.

$$G_\theta H G_\theta^{-1} = - \prod_{v,\mu} e^{-i\theta_v n_{v,\mu}} \sum_{i,j,\mu} c_{i,\mu}^\dagger c_{j,\mu} \prod_{u,\mu} e^{i\theta_u n_{u,\mu}}$$
$$G_\theta H G_\theta^{-1} = - \prod_{v \neq i,\mu} e^{-i\theta_v n_{v,\mu}} \sum_{i,j,\mu} e^{-i\theta_i n_{i,\mu}} c_{i,\mu}^\dagger c_{j,\mu} e^{i\theta_j n_{j,\mu}} \prod_{u \neq j,\mu} e^{i\theta_u n_{u,\mu}}$$

... à suivre



Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme intermédiaire

lemme

$$e^{-i\theta_x n_x} c^\dagger e^{i\theta_x n_x} = e^{-i\theta_x} c^\dagger$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme intermédiaire

lemme

$$e^{-i\theta_x n_x} c^\dagger e^{i\theta_x n_x} = e^{-i\theta_x} c^\dagger$$

Démonstration.

On rappelle les règles de commutation :

$$\begin{aligned} e^{-i\theta_x n_x} c^\dagger e^{i\theta_x n_x} &= \sum_k \frac{(-i\theta_x n_x)^k}{k!} c^\dagger \sum_j \frac{(i\theta_x n_x)^j}{j!} \\ &= \sum_k \frac{(-i\theta_x)^k}{k!} (n_x^k c^\dagger) \sum_j \frac{(i\theta_x n_x)^j}{j!} \\ &= \sum_k \frac{(-i\theta_x)^k}{k!} (c^\dagger) \sum_j \frac{(i\theta_x n_x)^j}{j!} \\ &= \sum_k \frac{(-i\theta_x)^k}{k!} (c^\dagger) (1 + 0 + 0 + \dots) \\ e^{-i\theta_x n_x} c^\dagger e^{i\theta_x n_x} &= e^{-i\theta_x} c^\dagger \end{aligned}$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Lemme : Hamiltonien et invariant de Jauge

Preuve du Lemme

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 G_\theta H G_\theta^{-1} &= - \prod_{v \neq i, \mu} e^{-i\theta_v n_{v, \mu}} \sum_{i, j, \mu} e^{-i\theta_i n_{i, \mu}} c_{i, \mu}^\dagger c_{j, \mu} e^{i\theta_j n_{j, \mu}} \prod_{u \neq j, \mu} e^{i\theta_u n_{u, \mu}} \\
 &= - \prod_{v \neq i, \mu} e^{-i\theta_v n_{v, \mu}} \sum_{i, j, \mu} e^{-i\theta_i} c_{i, \mu}^\dagger e^{-i\theta_i n_{i, \mu}} c_{j, \mu} e^{i\theta_j n_{j, \mu}} \prod_{u \neq j, \mu} e^{i\theta_u n_{u, \mu}} \\
 &= - \prod_{v \neq i, \mu} e^{-i\theta_v n_{v, \mu}} \sum_{i, j, \mu} e^{-i(\theta_i - \theta_j)} c_{i, \mu}^\dagger e^{-i\theta_i n_{i, \mu}} e^{i\theta_j n_{j, \mu}} c_{j, \mu} \prod_{u \neq j, \mu} e^{i\theta_u n_{u, \mu}} \\
 &= \dots \\
 &= - \sum_{i, j, \mu} e^{-i(\theta_i - \theta_j)} c_{i, \mu}^\dagger G_\theta G_\theta^{-1} c_{j, \mu} \\
 G_\theta H G_\theta^{-1} &= - \sum_{i, j, \mu} e^{-i(\theta_i - \theta_j)} c_{i, \mu}^\dagger c_{j, \mu}
 \end{aligned}$$

□

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Preuve du théorème

On pose $\theta = -i\varphi$

Comme $e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$ on obtient :

$$e^{-(\varphi_u - \varphi_v)} = \cosh(\varphi_u - \varphi_v) - \sinh(\varphi_u - \varphi_v)$$

$G_\theta H G_\theta^{-1} = H + U + iP$ avec :

- $U = -\sum [\cosh(\varphi_u - \varphi_v) - 1] c_{i,\mu}^\dagger c_{j,\mu}$
- $P = -i \sum \sinh(\varphi_u - \varphi_v) c_{i,\mu}^\dagger c_{j,\mu}$

Toutes ces matrices sont hermitiennes !

De plus, en prenant comme observable du système : $A = c_{x\uparrow}^\dagger c_{x\downarrow}^\dagger c_{y\uparrow} c_{y\downarrow}$

$$G_\theta A G_\theta^{-1} = e^{-2(\varphi_x - \varphi_y)} A$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Majoration de la trace

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Ae^{-\beta H}) &= \text{Tr}(G_\theta A G_\theta^{-1} e^{-\beta G_\theta H G_\theta^{-1}}) \\ &\leq e^{-2(\varphi_x - \varphi_y)} \sqrt{\|A^* A\|_\infty} \text{Tr}(e^{-\beta G_\theta H G_\theta^{-1}/2} e^{-\beta G_\theta^{-1} H G_\theta/2}) \\ &\leq e^{-2(\varphi_x - \varphi_y)} \text{Tr}(e^{-\beta(H+U)}) \\ &\leq e^{-2(\varphi_x - \varphi_y)} \|e^{-\beta(U)}\|_\infty \text{Tr}(e^{-\beta(H)}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta(H)})} \leq e^{-2(\varphi_x - \varphi_y)} \|e^{-\beta(U)}\|_\infty$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Majoration de la trace

Pour cela on a utilisé les propriétés suivantes :

- Cauchy-Schwartz : $Tr(AB) \leq \sqrt{A^*A} \sqrt{B^*B}$
- Golden-Symanzik-Thomson : $Tr(e^{O+P}) \leq Tr(e^O e^P)$ (si O et P hermitiennes)
- $|Tr(OP)| \leq \|O\|_\infty Tr(P)$ (si O : hermitienne et P positive)
- $Tr((O^*)^N O^N) \leq Tr((O^*O)^N)$ (avec $N = 2^m$)

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Noyau de Poisson

Dans l'hypothèse des plus proches voisins, le laplacien discret d'une fonction f est :

$$(\Delta f)_i = \sum_{j(i)} f(j) - 4f(i)$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Noyau de Poisson

Dans l'hypothèse des plus proches voisins, le laplacien discret d'une fonction f est :

$$(\Delta f)_i = \sum_{j(i)} f(j) - 4f(i)$$

On résout alors l'équation de Poisson :

$$(\Delta \varphi)_u = \delta_{x,u} - \delta_{y,u} \quad \text{avec condition } \varphi(y) = 0$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Noyau de Poisson

Dans l'hypothèse des plus proches voisins, le laplacien discret d'une fonction f est :

$$(\Delta f)_i = \sum_{j(i)} f(j) - 4f(i)$$

On résout alors l'équation de Poisson :

$$(\Delta \varphi)_u = \delta_{x,u} - \delta_{y,u} \quad \text{avec condition } \varphi(y) = 0$$

La résolution amène :

- $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$ telle que $|\varphi_u - \varphi_v| \leq q\delta$
- Lorsque $L \rightarrow \infty$ on a $\varphi_x \geq q\alpha \ln|x - y|$

De cette dernière propriété :

$$\cosh(\varphi_u - \varphi_v) - 1 \leq g(q)(\varphi_u - \varphi_v)^2 \quad \text{avec } g(q) = \frac{\cosh(q\delta) - 1}{(q\delta)^2}$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Noyau de Poisson

$$\begin{aligned} \|e^{-\beta U}\|_{\infty} &\leq \exp\left(\beta \sum_{u,v} |\cosh(\varphi_u - \varphi_v) - 1|\right) \\ &\leq \exp\left(\beta g(q) \sum_{u,v} \lambda_{uv} (\varphi_u - \varphi_v)^2\right) \\ &= \exp\left(-2\beta g(q) \sum_u \varphi_u (\Delta)_u\right) \end{aligned}$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Noyau de Poisson

$$\begin{aligned}\|e^{-\beta U}\|_{\infty} &\leq \exp\left(\beta \sum_{u,v} |\cosh(\varphi_u - \varphi_v) - 1|\right) \\ &\leq \exp\left(\beta g(q) \sum_{u,v} \lambda_{uv} (\varphi_u - \varphi_v)^2\right) \\ &= \exp\left(-2\beta g(q) \sum_u \varphi_u (\Delta)_u\right)\end{aligned}$$

$$\|e^{-\beta U}\|_{\infty} \leq \exp(2\beta g(q) q \varphi_x)$$

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Noyau de Poisson

Donc au final, en intégrant tous les résultats précédents on obtient :

$$\| \langle A \rangle_L \| \leq e^{-2\varphi_x + 2\beta g(q)q\varphi_x}$$

En minimisant cette fonction de q à droite, on obtient au final :

Exemple type : le modèle de Hubbard simple

Noyau de Poisson

Donc au final, en intégrant tous les résultats précédents on obtient :

$$\| \langle A \rangle_L \| \leq e^{-2\varphi_x + 2\beta g(q)q\varphi_x}$$

En minimisant cette fonction de q à droite, on obtient au final :

$$| \langle c_{x\uparrow}^\dagger c_{x\downarrow}^\dagger c_{y\uparrow} c_{y\downarrow} \rangle | \leq e^{-f(\beta)\alpha \ln|x-y|} = |x-y|^{-\alpha f(\beta)}$$

Sommaire

1 Introduction

2 Généralités

3 Modèle de Hubbard

4 Modèle XY

- Généralités
- Les nouveaux opérateurs
- Majoration Trace
- Equation de Poisson

5 Conclusion

Modèle XY

Généralités

Particules avec modèles de spin-S

⇒ Générateurs de taille $(2S+1)$ + Produit tensoriel $\mathcal{H}_{\mu,i} = \mathcal{H}_{\mu} \otimes \mathcal{H}_i$ de dimension 4

Modèle XY

Généralités

Particules avec modèles de spin-S

⇒ Générateurs de taille $(2S+1)$ + Produit tensoriel $\mathcal{H}_{\mu,i} = \mathcal{H}_{\mu} \otimes \mathcal{H}_i$ de dimension 4

Modèle spin- $\frac{1}{2}$: les générateurs sont les matrices (2x2) de Pauli :

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Modèle XY

Généralités

Particules avec modèles de spin-S

⇒ Générateurs de taille $(2S+1)$ + Produit tensoriel $\mathcal{H}_{\mu,i} = \mathcal{H}_{\mu} \otimes \mathcal{H}_i$ de dimension 4

Modèle spin- $\frac{1}{2}$: les générateurs sont les matrices (2x2) de Pauli :

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour ce modèle $c_{x,\mu} = 1 \otimes c_x$, $n_{x,\mu} = 1 \otimes n_x$.

$$n_{x,\uparrow} = \begin{pmatrix} n_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad n_{x,\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n_x \end{pmatrix} \quad n_{x,\mu=(\uparrow,\downarrow)} = n_{x,\uparrow} + n_{x,\downarrow} = 1 \otimes n_x$$

Modèle XY

Généralités

Commutation

Les règles de commutation deviennent :

Fermions :

$$[c_{x,\mu}, c_{y,\mu}^\dagger]_+ = \delta_{\mu\nu} \delta_{xy}$$

Modèle XY

Généralités

Commutation

Les règles de commutation deviennent :

Fermions :

$$[c_{x,\mu}, c_{y,\mu}^\dagger]_+ = \delta_{\mu\nu} \delta_{xy}$$

Bosons :

$$[c_{x,\mu}, c_{y,\mu}^\dagger] = \delta_{\mu\nu} \delta_{xy}$$

Modèle XY

Choix de l'opérateur de dilatation

On prouve que, dans le cas du modèle XY, on retrouve le même genre de propriété de décroissance.

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y$$

Modèle XY

Choix de l'opérateur de dilatation

On prouve que, dans le cas du modèle XY, on retrouve le même genre de propriété de décroissance.

$$H_L = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^x \otimes \sigma_j^x + \sigma_i^y \otimes \sigma_j^y$$

On étudie cette fois-ci l'opérateur A :

$$A = \langle \sigma_{a,\uparrow} \otimes \sigma_{b,\downarrow} \rangle$$

On doit alors choisir un autre opérateur G_θ :

$$G_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Modèle XY

Choix de l'opérateur de dilatation

On obtient en particulier (pour $\sigma = (\sigma^x, \sigma^y)$) :

$$H_\theta = G_\theta^{-1} H G_\theta = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(G_{\theta_i}^{-1} \sigma_i G_{\theta_i} \right) \otimes \left(G_{\theta_j}^{-1} \sigma_j G_{\theta_j} \right)$$

Modèle XY

Choix de l'opérateur de dilatation

On obtient en particulier (pour $\sigma = (\sigma^x, \sigma^y)$) :

$$H_\theta = G_\theta^{-1} H G_\theta = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(G_{\theta_i}^{-1} \sigma_i G_{\theta_i} \right) \otimes \left(G_{\theta_j}^{-1} \sigma_j G_{\theta_j} \right)$$

Après des calculs similaires (produits \leftrightarrow produits tensoriels) on obtient :

$$H_\theta = H + V$$

où V est hermitienne, de la forme :

$$\sum \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\theta_i - \theta_j) - 1 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta_i - \theta_j) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Modèle XY

Choix de l'opérateur de dilatation

On obtient en particulier (pour $\sigma = (\sigma^x, \sigma^y)$) :

$$H_\theta = G_\theta^{-1} H G_\theta = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(G_{\theta_i}^{-1} \sigma_i G_{\theta_i} \right) \otimes \left(G_{\theta_j}^{-1} \sigma_j G_{\theta_j} \right)$$

Après des calculs similaires (produits \leftrightarrow produits tensoriels) on obtient :

$$H_\theta = H + V$$

où V est hermitienne, de la forme :

$$\sum \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\theta_i - \theta_j) - 1 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta_i - \theta_j) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Similaire pour $H_\theta = G_\theta^{-1} A G_\theta$

Modèle XY

Majoration de la trace

Pour mener à bien les calculs, on sépare les cas :

$$H_\theta = G_\theta^{-1} A G_\theta = A^+ + A^-$$

Puis on applique des propriétés équivalentes sur les traces obtenues. Au final :

$$\text{Tr}(e^{-\beta(H+V)}) \leq \text{Tr}(e^{-\beta H}) \|e^{-\beta V}\|_\infty$$

Modèle XY

Majoration de la trace

On résout enfin l'équation de Poisson précédente, en séparant les cas (A^+ et A^-).

Résultat similaire

Sommaire

1 Introduction

2 Généralités

3 Modèle de Hubbard

4 Modèle XY

5 Conclusion

Conclusion

Autres modèles

Nous avons vu

- Des modèles permettant de traiter les comportements des réseaux de spins (Hubbard et XY) et des rappels sur les opérateurs de création, d'annihilation et de "nombre de particules"

Nous n'avons pas vu

Conclusion

Autres modèles

Nous avons vu

- Des modèles permettant de traiter les comportements des réseaux de spins (Hubbard et XY) et des rappels sur les opérateurs de création, d'annihilation et de "nombre de particules"
- Comment calculer pour un modèle très simplifié la décroissance des fonctions de corrélation

Nous n'avons pas vu

Conclusion

Autres modèles

Nous avons vu

- Des modèles permettant de traiter les comportements des réseaux de spins (Hubbard et XY) et des rappels sur les opérateurs de création, d'annihilation et de "nombre de particules"
- Comment calculer pour un modèle très simplifié la décroissance des fonctions de corrélation
- Comment l'étendre à un modèle vectoriel (XY)

Nous n'avons pas vu

Conclusion

Autres modèles

Nous avons vu

- Des modèles permettant de traiter les comportements des réseaux de spins (Hubbard et XY) et des rappels sur les opérateurs de création, d'annihilation et de "nombre de particules"
- Comment calculer pour un modèle très simplifié la décroissance des fonctions de corrélation
- Comment l'étendre à un modèle vectoriel (XY)

Nous n'avons pas vu

- Comment traiter les cas autres que "plus proches voisins" (voir Messenger & Ruiz CPT)

Conclusion

Autres modèles

Nous avons vu

- Des modèles permettant de traiter les comportements des réseaux de spins (Hubbard et XY) et des rappels sur les opérateurs de création, d'annihilation et de "nombre de particules"
- Comment calculer pour un modèle très simplifié la décroissance des fonctions de corrélation
- Comment l'étendre à un modèle vectoriel (XY)

Nous n'avons pas vu

- Comment traiter les cas autres que "plus proches voisins" (voir Messenger & Ruiz CPT)
- Comment optimiser la solution de l'équation de Poisson

Conclusion

Autres modèles

Nous avons vu

- Des modèles permettant de traiter les comportements des réseaux de spins (Hubbard et XY) et des rappels sur les opérateurs de création, d'annihilation et de "nombre de particules"
- Comment calculer pour un modèle très simplifié la décroissance des fonctions de corrélation
- Comment l'étendre à un modèle vectoriel (XY)

Nous n'avons pas vu

- Comment traiter les cas autres que "plus proches voisins" (voir Messenger & Ruiz CPT)
- Comment optimiser la solution de l'équation de Poisson
- Comment traiter le modèle de Hubbard avec les interactions de potentielles

Lectures complémentaires I



T. Koma and H. Tasaki

Decay of Superconducting et Magnetic Correlations
[Physical Review Letters, Volume 68\(21\) : 3248–3251, 1992.](#)



B. Simon

The Statistichal Mechanics of Lattice Gases.
[Princeton University Press, 1995.](#)



H.T. Diep

Physique de la matière condensée.
[Dunod, 2003.](#)



A. Messenger , S. Miracle-Sole and J. Ruiz

Upper bounds on the decay of correlations in $SO(N)$ -symmetric spin systems with long range interactions
[Annales de l'institut Henri Poincaré \(A\) Physique théorique, Volume 40\(1\) : 85-96, 1984.](#)

Merci de votre attention !
Des questions ?