

PAVAGES, PÉRIODICITÉ ET QUASIPÉRIODICITÉ

Jean-Christophe Lavocat

Table des matières

1	Préliminaires et définitions	2
1.1	Définitions élémentaires	2
1.2	Périodicité et décidabilité	2
2	Relation d'ordre et quasipériodicité	4
2.1	Relation d'extraction	4
2.2	Quasipériodicité	4
3	Fonctions de dénombrement sur les pavages : propriétés	6
3.1	Fonction de quasipériodicité	6
3.2	Fonction d'énumération	6

Introduction

L'étude de pavages se ramène à l'étude d'un ensemble fini de pavés que l'on a associés entre eux grâce à un ensemble fini de règles. Cela revient à introduire ce que l'on appelle en physique un système à contraintes locales. L'application des pavages s'étend de la physique (problème d'agencement d'espace et cristallographie) à l'informatique (étude des mots bi-infinis), en aidant aussi beaucoup les mathématiques.

Nous allons prouver dans ce document que tout jeu de tuiles pouvant paver le plan de manière quelconque, peut au moins paver le plan de manière quasipériodique (nous verrons par la suite ce que tout cela veut dire). Ce résultat marque un tournant dans l'étude des propriétés générales des pavages. En effet Wang, qui est l'initiateur de l'étude moderne des pavages, avait conjecturé en 1961 que tout jeu de tuiles permettant de paver le plan, permettait de le paver au moins d'une façon périodique. Or Berger, l'un de ses élèves, donna un contre-exemple en 1966 d'un jeu de tuiles qui ne pouvait être qu'apériodique. Cette preuve mathématique a été assistée par ordinateur et a nécessité 20426 tuiles différentes. La construction a été améliorée plus tard par Robinson qui n'a utilisé que 56 tuiles.

Pour aboutir à cette conclusion, nous allons introduire une relation d'ordre sur les pavages, la relation d'extraction, dont nous verrons que les pavages quasipériodiques sont les éléments minimaux. Nous introduirons ensuite une fonction de quasipériodicité et nous verrons avec le deuxième résultat de ce document qu'un pavage est périodique si et seulement si cette fonction peut se mettre sous forme linéaire (c'est-à-dire sous forme $x \rightarrow x + c$). Cette partie résume en partie les travaux de Bruno Durand.

Un troisième aspect important de cet étude concernera les pavages sans contraintes, sur lesquelles nous nous appuyerons pour rechercher des propriétés sur les fonctions introduites précédemment. Cette partie du rapport est en grande partie inspirée des travaux de Christophe Papazian et de Bruno Durand [2]. Nous tenterons de plus d'apporter quelques suppléments personnels aux travaux déjà cités.

1 Préliminaires et définitions

1.1 Définitions élémentaires

Définition 1:

Pavé : Un polyèdre qui servira à paver \mathbb{R}^n . Dans le cas de \mathbb{Z}^2 , on parle de **tuile**.

Tuile de Wang : Un carré avec des côtés colorés.

Jeu de tuiles : Un sous ensemble de \mathbb{Z}^4 , chacun des quadruplets correspondant à un ensemble de quatre couleurs qui définissent une tuile. On notera τ un tel ensemble de tuiles dans la suite du document.

Configuration : Application de $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \tau$. A chaque point du plan on associe une et une seule tuile de τ

Motif : Restriction d'une configuration à un domaine fini de \mathbb{Z}^2 . Pour plus de facilité, nous noterons : $mot(\mathcal{P}_a)$ l'ensemble des motifs d'un pavage \mathcal{P}_a . On notera de la même façon : $mot(\mathcal{P}_a)_n$ les motifs carrés de taille n de \mathcal{P}_a .

Motif valide : Motif dans lequel, lorsque deux tuiles sont voisines, le contact est de la même couleur.

Pavage du plan : Configuration dans laquelle tout motif extrait est valide.

On peut tout de suite établir une notation évidente après ces définitions. Comme une configuration est une application de \mathbb{Z}^2 dans τ , l'ensemble des configurations est donc $\tau^{\mathbb{Z}^2}$. Nous noterons donc de la sorte cet ensemble.

Concernant les motifs, nous pourrions sans restriction, nous restreindre à un motif carré, étant donné que tout motif est un sous ensemble d'un motif carré.

1.2 Périodicité et décidabilité

Le problème du pavage du plan, qui s'attache à savoir si un jeu de tuiles donné permet un pavage du plan, a été introduit par Wang dans le but de prouver la satisfiabilité de formules logiques (données à l'aide de quantificateurs de Kahr). Berger a montré l'indécidabilité d'un tel problème, grâce à la découverte d'un pavage non périodique. Nous allons reprendre cette preuve par la suite. Commençons d'abord par présenter la notion de périodicité, puis par comprendre l'approche qu'a voulu suivre Wang.

Définition 2:

Pavage périodique : Une configuration valide qui admet un vecteur (x, y) de périodicité. Cela revient à dire que, quelle que soit la tuile considérée, une translation de (x, y) permet de retrouver la même tuile.

On peut aussi penser qu'un pavage ne peut être périodique que selon un seul axe (nous prendrons l'axe x pour la suite). On parlerait alors de **périodicité simple selon l'axe x**. Wang a prouvé que si un jeu de tuiles peut former un pavage du plan de périodicité simple selon un axe, alors il peut aussi former un pavage périodique (i.e. selon x et y).

Proposition 1. *Tout jeu de tuiles permettant de former un pavage qui est périodique simple selon un axe, permet de former un pavage qui est périodique.*

Démonstration. Nous allons employer des notations qui seront reprises par la suite dans ce document. On notera \mathcal{P}_a un pavage valide. On désignera par $\mathcal{P}_a(x, y)$ la tuile se trouvant en (x, y) . Ainsi considérons $\mathcal{P}_a \in \tau^{\mathbb{Z}^2}$ tel que $\exists T \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \mathcal{P}_a(x + T, y) = \mathcal{P}_a(x, y)$.

Considérons, pour y fixé, l'ensemble des segments $[\mathcal{P}_a(0, y), \mathcal{P}_a(T - 1, y)]$. Le jeu de tuiles étant de cardinal fini, ce nombre de segments est lui aussi fini, de cardinal $(\#\tau)^T$ au plus. Ainsi, on sait qu'il existe y_1 et y_2 tels que $[\mathcal{P}_a(0, y_1), \mathcal{P}_a(T - 1, y_1)] = [\mathcal{P}_a(0, y_2), \mathcal{P}_a(T - 1, y_2)]$.

Il suffit de remarquer que :

$$\begin{cases} \forall y \in [y_1; y_2], & \mathcal{P}(0, y) = \mathcal{P}(T, y) \\ \forall x \in [0; T - 1], & \mathcal{P}(x, y_1) = \mathcal{P}(x, y_2) \end{cases}$$

Ainsi, le motif rectangulaire ayant comme angle inférieur $(0, y_1)$ et comme angle supérieur $(T - 1, y_2 - 1)$ peut donc servir à construire un pavage périodique avec le jeu de tuiles d'origine. □

Nous allons voir à présent ce qui a induit Wang en erreur. Expliquons comment, si l'ensemble des jeux de tuiles permettant de paver le plan, permettait de le paver de façon périodique, nous pourrions créer un algorithme qui déciderait, si oui ou non, le jeu de tuiles donné permet de paver le plan.

On suppose à présent l'équivalence :

"Le jeu de tuiles permet de paver le plan" \iff "Le jeu de tuiles permet de paver le plan de façon périodique".

Dans ces conditions, tout jeu de tuiles permettant de paver le plan, admet une configuration périodique. Nous allons alors créer un algorithme qui affirme si oui ou non, un jeu de tuiles permet un pavage périodique :

```

Programme periodicite (jdt) =
Soit resultat :=faux;
Soit n :=1;
Tant que (non resultat) faire
Si un motif de taille n peut être pavé avec jdt alors
Si le pavage obtenu est périodique alors
resultat :=vrai;
Sinon
n :=n+1;
Sinon sortir de la boucle;
Renvoyer resultat ;;

```

Définition 3:

Problème décidable : Un problème dont on peut savoir s'il est juste ou faux en appliquant un algorithme qui termine en un temps fini.

Ainsi, grâce à cette première propriété, Wang et bien d'autres ont cru un temps que le problème du pavage du plan était décidable. En effet, si tout jeu de tuiles qui permet un pavage plan, permet un pavage plan périodique, alors le problème du pavage du plan est décidable. Il suffirait de tester un grand nombre de configurations valides et de s'arrêter lorsque une configuration périodique est trouvée. Il a donc suffi à Berger [3] (un élève de Wang) de mettre en évidence un jeu de tuiles qui ne pavait le plan que de manière quasipériodique, et avec lequel il était impossible de former un pavage périodique.

Cependant, cela ne montrait pas l'indécidabilité, ce qui fut prouvé en 1972 par Gurevich et Koriakov [4] qui précisèrent les idées avancées par Berger.

2 Relation d'ordre et quasipériodicité

2.1 Relation d'extraction

Il est possible d'introduire, sur l'ensemble des pavages, une relation d'ordre, dont les pavages quasipériodiques (se rapporter à la définition 5) sont les éléments minimaux. Nous n'avons pas traité cet aspect dans cette étude, mais il est aussi possible de regrouper les pavages selon des classes d'équivalences et de leur associer des propriétés communes [2].

Définition 4:

Relation d'extraction : On considère \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , deux pavages valides. On dira que \mathcal{P}_1 est extrait de \mathcal{P}_2 et on notera : $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$ lorsque tout motif de \mathcal{P}_1 se retrouve dans \mathcal{P}_2 . On remarque que cela revient à considérer tout motif carré, et la définition devient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \text{mot}(\mathcal{P}_1)_n, \quad m \subset \mathcal{P}_2$$

Proposition 2. Soit un pavage \mathcal{P}_a , il y a équivalence entre :

- (i) \mathcal{P}_a pave le plan
- (ii) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, tout motif de \mathcal{P}_a de taille n est valide.

Démonstration. Le principe de cette preuve repose sur ce que l'on nommera l'**extraction diagonale d'un pavage**.

\Leftarrow On se place en $(0,0)$ et on considère l'ensemble des motifs qui couvrent $(0,0)$. On en a un nombre infini par hypothèse. Ainsi, comme il y a un nombre fini de tuiles dans τ , il existe une tuile apparaissant dans une infinité de pavages. On ne garde alors que ces pavages, et on va prouver sur le reste du plan en considérant successivement tous les motifs carrés de taille n , et en construisant de la même façon leur couronne. On continue ainsi pour former une suite de motif de taille aussi grande que l'on veut.

La réciproque est immédiate. □

Proposition 3. On suppose que $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$ on a alors : \mathcal{P}_2 valide $\Rightarrow \mathcal{P}_1$ valide.

Réciproquement, si \mathcal{P}_1 est non valide, alors \mathcal{P}_2 ne l'est pas non plus

Démonstration. Il suffit de remarquer que tout motif de \mathcal{P}_1 est valide et se retrouve dans \mathcal{P}_2 . Ainsi quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un motif de taille n valide dans \mathcal{P}_2 . Donc, d'après la proposition 2, on a bien le résultat.

Pour le second résultat, il suffit de voir que le défaut présent dans \mathcal{P}_1 se retrouvera dans \mathcal{P}_2 . □

2.2 Quasipériodicité

Définition 5:

Pavage quasipériodique : Une configuration valide \mathcal{P}_a telle que :

$$\forall m \in \text{mot}(\mathcal{P}_a), \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathcal{P}_a([i, i+n] \times [j, j+n])$$

Remarques : Un pavage périodique est quasipériodique. On appelle **pavage quasipériodique strict** tout pavage quasipériodique mais non périodique.

Si un pavage n'est pas quasipériodique, il existe $m \in \text{mot}(\mathcal{P}_a)$, appelé **motif critique** tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists i, j \in \mathbb{N}, \quad m \notin \mathcal{P}_a([i, i+n] \times [j, j+n])$$

Proposition 4. Si $m_c \in \text{mot}(\mathcal{P}_1)$ est critique pour \mathcal{P}_1 et si $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$ alors m_c est un motif critique de \mathcal{P}_2 .

Démonstration. Comme $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$ on a bien $m_c \in \text{mot}(\mathcal{P}_2)$. De plus, comme m_c est critique pour le premier pavage, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \text{mot}(\mathcal{P}_1)_n, m_c \notin m$. On a bien sur encore $m \in \mathcal{P}_2$. Donc, par définition m_c est aussi critique pour \mathcal{P}_2 . \square

Proposition 5. Si $m \in \text{mot}(\mathcal{P}_1)$ est critique pour \mathcal{P}_1 , alors il est possible de construire un pavage \mathcal{P}_2 tel que $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_1$ et sans que m appartienne à \mathcal{P}_2 .

Démonstration. On sait que m est critique si : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists i, j \in \mathbb{N}, m \notin \mathcal{P}_a([i, i+n] \times [j, j+n])$. Ainsi on peut construire une suite infinie de motifs de taille croissante sans que m n'appartienne à cette suite. On applique alors à nouveau le procédé d'extraction diagonale sur cette suite, ce qui va nous permettre de construire un pavage valide \mathcal{P}_2 à partir de \mathcal{P}_1 . Comme il est obtenu par extraction diagonale, on a bien $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_1$. \square

Théorème 1. Si un jeu de tuiles permet de construire un pavage valide, alors il admet une configuration quasipériodique.

Démonstration. En effet, si la configuration \mathcal{P}_a n'est pas déjà quasipériodique il existe au moins un motif critique. On choisit alors l'un des plus petits motifs critiques (petit au sens de la taille de son domaine, ou bien à taille égale en choisissant arbitrairement l'ordre lexicographique sur ses tuiles). En appliquant la proposition 5, on construit un pavage \mathcal{P}_1 tel que $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_a$ et dans lequel le premier motif critique n'apparaît pas. Ainsi \mathcal{P}_1 peut contenir tous les motifs critiques de \mathcal{P}_a mais pas le premier choisi. D'après la proposition 4, il ne peut pas en contenir plus.

On recommence alors sur \mathcal{P}_1 :

- Si on termine après n étapes, on a trouvé le pavage quasipériodique cherché : \mathcal{P}_n qui est bien construit à partir du jeu de tuiles initial, puisque extrait de \mathcal{P}_a .

- Sinon, on a construit une suite infinie de pavages $\mathcal{P}_n \leq \dots \leq \mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_a$. On applique alors à cette suite le procédé d'extraction diagonale en choisissant, à l'étape k , une tuile dans \mathcal{P}_k . On note \mathcal{P}_e ce pavage extrait. Montrons que \mathcal{P}_e est quasipériodique. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe un motif critique $m_c \in \mathcal{P}_e$. Comme : $\mathcal{P}_e \leq \mathcal{P}_n \leq \dots \leq \mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_a$, d'après la proposition 4, m_c devrait appartenir à tous les \mathcal{P}_k . Or par construction, ce motif n'appartient pas à tous les pavages à partir d'un certain rang. Donc \mathcal{P}_e est quasipériodique. \square

3 Fonctions de dénombrement sur les pavages : propriétés

3.1 Fonction de quasipériodicité

Nous allons dans cette partie introduire une **fonction de quasipériodicité** afin de caractériser certaines propriétés des pavages. Nous allons utiliser la fonction intermédiaire $f_{\mathcal{P}_a} : \text{mot}(\mathcal{P}_a) \rightarrow \mathbb{N}$. Cette fonction prend en argument un motif du pavage et renvoie le plus petit entier i tel que le motif apparaisse dans n'importe quel carré de \mathcal{P}_a de taille $i \times i$. Sans restreindre les propriétés de cette fonction nous pouvons nous contenter des motifs carrés. Nous définissons alors la fonction :

$$q_{\mathcal{P}_a}(n) = \max_{m \in \text{mot}_n(\mathcal{P}_a)} f_{\mathcal{P}_a}(m)$$

Cette fonction est appelée fonction de quasipériodicité. De manière assez intuitive, cette fonction est croissante.

Théorème 2. *Un pavage est quasipériodique $\iff \exists c \in \mathbb{N} \quad q_{\mathcal{P}_a}(n) = n + c$*

Démonstration. \Rightarrow De manière assez évidente, si un pavage est périodique, nous savons que $\mathcal{P}_a(x + T, y) = \mathcal{P}_a(x, y)$. Ainsi, $q_{\mathcal{P}_a}(n) = n + T - 1$. Nous avons donc la relation attendue.

\Leftarrow Réciproquement, considérons un pavage dont la fonction de périodicité est de la forme $q_{\mathcal{P}_a}(n) = n + c$. Nous allons vérifier qu'il existe un vecteur de périodicité dans ce pavage. Soit $x_1 > c$. On considère le motif $M_1 \in \text{mot}(\mathcal{P}_a)_{x_1}$.

On considère la zone : $\mathcal{P}_a([1, 1 + x_1 + c] \times [0, x_1 + c])$. Nous savons par définition que nous devons retrouver M_1 dans ce motif. De plus, le coin supérieur droit de la copie de M_1 ne peut se trouver que dans la zone : $\mathcal{P}_a([x_1 + 1, x_1 + c + 1] \times [x_1 + 1, x_1 + c])$. Ainsi, il n'y a que c^2 possibilités pour retrouver une copie de M_1 .

A présent, considérons le motif M_2 de taille $x_2 = x_1 + 1$, avec son coin inférieur gauche placé en $(0,0)$. A nouveau, il est possible de trouver une copie de M_2 , M'_2 , dans la zone $\mathcal{P}_a([1, 1 + x_2 + c] \times [0, x_2 + c])$, avec un choix restreint à c^2 emplacements. De plus, comme $M_1 \subset M_2$, la translation $M_2 M'_2$ est valide pour M_1 et M_2 . En procédant par itération, on peut trouver un vecteur qui convient à tous les M_i et on a donc fini la preuve. □

3.2 Fonction d'énumération

Il est aussi possible de définir une autre fonction intéressante concernant la description des pavages, la **fonction d'énumération**. Nous noterons donc, par la suite, $g_{\mathcal{P}_a}$ l'application qui à un entier n associe le nombre motif carré de côté n du pavage. Le jeu de tuiles étant fini, la définition est valide pour tout pavage, et on remarque bien sur que cette fonction est croissante car 2 motifs différents de $\text{mot}(\mathcal{P}_a)_n$ formeront deux motifs distincts de $\text{mot}(\mathcal{P}_a)_{n+1}$ par adjonction des tuiles nécessaires sur les côtés.

Proposition 6. $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_{\mathcal{P}_a} \leq (q_{\mathcal{P}_a}(n) + 1 - n)^2$

Démonstration. En effet, il y a dans tout motif de taille $q_{\mathcal{P}_a}$ au plus $(q_{\mathcal{P}_a}(n) + 1 - n)^2$ motifs de taille n . Or, par définition de $q_{\mathcal{P}_a}$, il y a dans cette fenêtre tous les motifs de taille n . □

Proposition 7.

Le pavage \mathcal{P}_a est périodique $\iff \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $g_{\mathcal{P}_a}(n) = g_{\mathcal{P}_a}(n+1)$
 $\iff g_{\mathcal{P}_a}$ est stationnaire

Démonstration. Montrons d'abord que les deux propositions de droites sont équivalentes. On a de manière évidente : $g_{\mathcal{P}_a}$ est stationnaire $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $g_{\mathcal{P}_a}(n) = g_{\mathcal{P}_a}(n+1)$.

Réciproquement, montrons qu'il existe une unique façon de prolonger l'ensemble des motifs de $mot_{n+1}(\mathcal{P})$. Soit $m \in mot_{n+1}(\mathcal{P})$. Alors, m est constitué de 4 motifs de $mot_n(\mathcal{P})$ (voir dessin, page 11 du dossier de Papazian).

Comme $g_{\mathcal{P}_a}(n) = g_{\mathcal{P}_a}(n+1)$ revient à dire que tous motifs de $mot_n(\mathcal{P}_a)$ ne se prolonge que d'une seule manière, nous savons que le prolongement vers la gauche/bas de m_1 , (vers la droite/bas de m_2 , vers la droite/haut de m_3 , vers la gauche/haut de m_4) (voir dessin) est unique. Ainsi, il n'existe qu'une seule manière de prolonger m .

Donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $g_{\mathcal{P}_a}(n) = g_{\mathcal{P}_a}(n+1) \Rightarrow g_{\mathcal{P}_a}(n+1) = g_{\mathcal{P}_a}(n+2)$, et par suite, $g_{\mathcal{P}_a}$ est stationnaire.

Montrons à présent que : le pavage \mathcal{P}_a est périodique $\iff g_{\mathcal{P}_a}$ est stationnaire. Le sens direct est évident puisque d'après le théorème 2 (page 6), nous avons $(q_{\mathcal{P}_a}(n) + 1 - n)^2$ constant à partir d'un certain rang, donc $g_{\mathcal{P}_a}$ est stationnaire.

Réciproquement si $g_{\mathcal{P}_a}$ est stationnaire, il existe un rang à partir duquel $g_{\mathcal{P}_a}(n) \leq n$. □

Conclusion

Nous avons donc, après avoir défini les concepts à la base de l'étude des pavages, énoncé différentes propriétés présentées par l'ensemble des pavages.

Tout d'abord, nous avons vu qu'un jeu de tuiles permettant de paver le plan selon un vecteur de périodicité, permet un pavage périodique. Ensuite, tout pavage extrait d'un pavage valide est aussi valide.

L'un des théorèmes importants a ensuite été vu dans la deuxième partie : tout jeu de tuiles permettant de paver le plan permet de former un pavage quasipériodique. Cette preuve est menée à bien grâce au procédé d'extraction diagonale sur un pavage.

La dernière partie, quant à elle, a été dédiée à deux fonctions traduisant les propriétés de quasipériodicité des pavages. Nous avons de même pu établir des relations entre ces deux fonctions.

Références

- [1] B.Durand : Tilings and quasiperiodicity. In *ICALP 1997* volume 1256 of *Lecture Notes in Computer Science*
- [2] C.Papazian, B.Durand : Structure des Ensembles de Pavages. Disponible sur : <http://www.ens-lyon.fr/LIP/Pub/rr1997.php>
- [3] R.Berger : The undecidability of the domino problem. In *Memoirs of the American Mathematical Society*
- [4] Y.Gurevich, I.Koriakov : A remark on Berger's paper on the domino problem. In *Siberian journal of mathematics*